30 درجة في الوزاري

1 الاسئلة الوزارية حول "الصيغة الجبرية(العادية) للعدد المركب والعمليات على مجموعة الاعداد المركبة"

س: ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1+3i)^2+(3-2i)^2$

sol :

$$(1+3i)^2+(3-2i)^2$$
$$=(1+6i+9i^2)+(9-12i+4i^2)$$
$$=(-8+6i)+(5-12i)$$
$$=-3-6i$$

(1/1998)

س: جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

sol :

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$$
$$=\left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$
$$=\left(\frac{(3-i)+(-3-i)i}{1+1}\right)^2$$
$$=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$$
$$=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$$

(1/1999)

س: اذا كان $x=2+3i\,,y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2

sol :

$$x^2+2y^2=(2+3i)^2+2(3-i)^2$$
$$=(4+12i+9i^2)+2(9-6i+i^2)$$
$$=(-5+12i)+2(8-6i)$$
$$=(-5+12i)+(16-12i)$$
$$=11+0i$$

(1/2000)

س: ضع مايأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(-2+i)(3+2i)$

sol :

$$c=(3+2i)(-2+i)$$
$$=-6+3i-4i+2i^2=-8-i$$
$$c^{-1}=\frac{1}{c}=\frac{1}{-8-i}$$
$$=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$$
$$=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$$

س: جد النظير الضربي للعدد المركب $3+5i$ ثم ضعه بالصورة العادية.

sol :

$$c^{-1}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3+5i}$$
$$=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$
$$=\frac{3-5i}{9+25}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$$

(1/2003)

س: جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}\,i)^2-(2-\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$$(1-\sqrt{3}\,i)^2-(2-\sqrt{3}\,i)^2$$
$$=(1-2\sqrt{3}\,i+3i^2)-(4-4\sqrt{3}\,i+3i^2)$$
$$=(-2-2\sqrt{(3)}\,i)-(1-4\sqrt{3}\,i)$$
$$=(-2-2\sqrt{3}\,i)+(-1+4\sqrt{(3)}\,i)$$
$$=-3+2\sqrt{3}\,i$$

(1/2004)

س: جد ناتج بالصيغة الديكارتية $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$

sol :

$$(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$$
$$=(9+24i+16i^2)+(5+5i-3i-3i^2)$$
$$=(-7+24i)+(8+2i)=1+26i$$
$$=(1,26)$$

(1/2005)

س: اذا كانت $x=-1+2i$ جد قيمة x^2+3x+5 بالصيغة الديكارتية (ارجاند)

sol :

(2/2005)

$$x2+3x+5$$
$$=(-1+2i)^2+3(-1+2i)+5$$
$$=(1-4i+4i^2)+(-3+6i)+5$$
$$=(-3-4i)+(2+6i)$$

$=-1+2i=-1,2$ وهي صيغة ارجاند المطلوبة

س/ اذا كان $x = 3 + 2i\ ,\ y = 1 - i$ اثبت ان
$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$

sol :

$LHS: \overline{x + y} = \overline{(3 + 2i) + (1 - i)}$

$= \overline{4 + i} = 4 - i$

(2006/"تمهيدي")

$RHS: \bar{x} + \bar{y} = \overline{(3 + 2i)} + \overline{(1 - i)}$

$= (3 - 2i) + (1 + i) = 4 - i$

$\rightarrow LHS = RHS$

س/ اذا كانت $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

sol :

$x^2 + 2x + 6$

$= (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 6$

$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6$

$= (-3 - 4i) + (4 + 4i)$

$= 1 + 0i$

(1/2007"خارج القطر")

س/ حل المعادلة $Z^4 + 13Z^2 + 36 = 0$

sol :

$Z^4 + 13Z^2 + 36 = 0$

(2/2009)

$(Z^2 + 9)(Z^2 + 4) = 0$

$either\ Z^2 = -9 \rightarrow Z = \pm 3i$

$Or\ Z^2 = -4 \rightarrow Z = \pm 2i$

س/ اذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3 + b^3) = 7$

sol :

$$a + bi = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

(2010/"تمهيدي")

$$= \frac{2 + 2i + i - 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$a = \frac{1}{2}\ , b = \frac{3}{2}$

$$2(a^3 + b^3) = 2(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}) = 2(\frac{28}{8}) = 7$$

(1/2023"تطبيقي")

س/ ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1 + i)^5 - (1 - i)^5$

sol :

$(1 + i)^5 = (1 + i)^4 (1 + i)$

$= [(1 + i)^2]^2 (1 + i)$

$= (1 + 2i + i^2)^2 (1 + i)$

$= (2i)^2 (1 + i) = 4i^2 (1 + i)$

$= -4(1 + i) = -4 - 4i$

$(1 - i)^5 = (1 - i)^4 (1 - i)$

(2/2012)

$= [(1 - 1)^2]^2 (1 - i)$

$= (1 - 2i + i^2)^2 (1 - i)$

$= (-2i)^2 (1 - i) = 4i^2 (1 - i)$

$= -4(1 - i) = -4 + 4i$

$(1 + i)^5 - (1 - i)^5$

$= (-4 - 4i) - (-4 + 4i)$

$= (-4 - 4i) + (4 - 4i) = 0 - 8i$

س/ اثبت ان $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

sol :

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1 - 2i + i^2}{1+i} + \frac{1 + 2i + i^2}{1-i}$$

$$= \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{-2i + 2i^2}{1+1} + \frac{2i + 2i^2}{1+1}$$

(3/2012)

$= (-1 - i) + (-1 + i) = -2$

س/ جد قيمة $(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)$

sol :

$(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)$

(1/2013)

$= (1 - i)(1 + 1)(1 + i)$

$= (2)(1 + 1) = (2)(2) = 4$

ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

("1/2013"خارج القطر")

sol :

$$\frac{(1-i)^{13}}{64}=\frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64}$$
$$=\frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64}=\frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$$
$$=\frac{(-2i)^6(1-i)}{64}=\frac{64i^6(1-i)}{64}$$
$$=\frac{-64\,(1-i)}{64}=-(1-i)=-1+i$$

اذا كان $C_1=7-4i\ ,C_2=2-3i$
فتحقق من: $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

sol :

$$LHS:\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}\right)}$$
$$=\overline{\left(\frac{14+21i-8i+12}{4+9}\right)}=\overline{\left(\frac{26+13i}{13}\right)}$$
$$=\overline{2+i}=2-i$$
$$RHS:\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}=\frac{\overline{7-4i}}{\overline{2-3i}}=\frac{7+4i}{2+3i}=\frac{7+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$$
$$=\frac{14-21i+8i+12}{4+9}$$
$$=\frac{26-13i}{13}=2-i$$

("2014/"تمهيدي")

ضع العدد بالصيغة العادية للعدد المركب: $\frac{(1+i)^{15}}{128}$

(1/2018)

sol :

$$\frac{(1+i)^{15}}{128}=\frac{\left((1+i)^2\right)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{(1+2i-1)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{(2i)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{128i^4.i^3(1+i)}{128}$$
$$=-i(1+i)$$
$$-i(1+i)$$
$$Z=(1-i)\rightarrow P_1(1,-1)$$
$$\bar{z}=(1+i)\rightarrow P_2(1,1)$$

اذا علمت ان $x=8-i$, وكان $y=2+i$,تحقق من ان $\overline{xy}=\bar{x}\,.\,\bar{y}$

(2/2018)

sol :

$$x=8-i\rightarrow\bar{x}=8+i$$
$$y=2+i\rightarrow\bar{y}=2-i$$

نأخذ الطرف الايسر

$$\overline{x.y}=\overline{(8-i)(2+i)}$$
$$=\overline{16+8i-2i-i^2}$$
$$=\overline{17+6i}$$
$$\bar{x}\,.\,\bar{y}=17-6i$$

نأخذ الطرف الايمن

$$\bar{x}\,.\,\bar{y}=(8+i)(2-i)$$
$$=16-8i+2i-i^2$$
$$=17-6i$$

∴الطرف الايمن = الطرف الايسر فالعلاقة صحيحة

اثبت ان $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$

(1/2017)

sol :

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}$$
$$=\frac{1}{1+4i+4i^2}+\frac{1}{1-4i+4i^2}$$
$$=\frac{1}{-3+4i}+\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3-4i-3+4i}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{-6}{9+16}=\frac{-6}{25}$$ الطرف الايمن

س جد مجموعة حلول المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2+2i(3-2i)=3Z$$

sol :

(2/2017)

$$Z^2-3Z+2i(3-2i)=0$$
$$(Z-2i)\big(Z-(3-2i)\big)=0$$
$$if\ Z=2i \quad OR \quad Z=(3-2i)$$

طريقة ثانية بالدستور

$$a=1\ \ ,b=-3\ \ ,c=2i(3-2i)$$
$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(4+6i)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16-24i}}{2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{-7-24i}}{2}$$

$let\ \sqrt{-7-24i}=a+bi$ بتربيع الطرفين

$$-7-24i=a^2+b^2i^2+2abi$$
$$a^2-b^2=-7\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2ab=-24\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (2) نستنتج $a=\frac{-12}{b}$

$\frac{144}{b^2}-b^2=-7$ نعوض في (1)

$$144-b^4=-7b^2\ \rightarrow b^4-7b^2-144=0$$

$(b^2-16)(b^2+9)=0$ اما $b^2+9=0$ يهمل

$\rightarrow$ او $b^2=16\rightarrow b=\pm4\ \ \therefore a=\frac{-12}{\pm4}\ \ \rightarrow a=3$

فالعددين $(3-4i),(-3+4i)$

$$\therefore Z=\frac{3+(-3+4i)}{2}=\frac{4i}{2}$$

$=2i$ وبنفس الطريقة يتم تعويض الجذر الثاني

$$or\ Z=\frac{3-(-3+4i)}{2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

الطريقة الثالثة

$$Z^2-3Z+6i-4i^2=0\ \rightarrow Z^2-4i^2-3Z+6i=0$$
$$(Z-2i)(Z+2i)-3(Z-2i)=0$$
$$\rightarrow(Z-2i)(Z+2i-3)=0$$
$$\therefore Z=2i \quad or\ \ Z=-2i+3=3-2i$$

س اثبت ان : $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

sol :

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}$$

الطريقة الاولى

(2020/"تمهيدي")

(2/2020"تطبيقي")

(3/2023"تطبيقي")

$$=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$$
$$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$$
$$=\frac{3+4i-3+4i}{(3-4i)(3+4i)}$$
$$=\frac{8i}{9-16i^2}=\frac{8i}{9+16}$$

$=\frac{8i}{25}=$ الطرف الايمن

الطريقة الثانية

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}$$
$$=\frac{(2+i)^2-(2-i)^2}{(2-i)^2*(2+i)^2}$$

$=\frac{3+4i-3+4i}{(5)^2}=\frac{8i}{25}=$ الطرف الايمن

س ضع بالصيغة العادية (الجبرية) ناتج : $\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}$

sol :

(1/2020)

$$\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}$$
$$=\frac{i}{2+2\sqrt{2}i-1}+\frac{i}{2-2\sqrt{2}i-1}$$
$$=\frac{i}{1+2\sqrt{2}i}+\frac{i}{1-2\sqrt{2}i}\ *$$
$$=\frac{i(1-2\sqrt{2}i)+i(1+2\sqrt{2}i)}{(1+2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{i+2\sqrt{2}\ +\ i-2\sqrt{2}}{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\frac{2i}{1+8}$$
$$=\frac{2}{9}i=\left(0+\frac{2}{9}i\right)$$

اذا وحد المقامات وبسط الحل تعطى الدرجة كاملة او في الخطوة * اذا ضرب بمرافق العدد

س/ ضع بالصيغة العادية ناتج: $(1-\sqrt{2}i)^2-(2-\sqrt{2}\,i)^2$

sol :

الطريقة الأولى:

$$(1-\sqrt{2}i)^2-(2-\sqrt{2}i)^2$$

$$=(1-2\sqrt{2}i-2)-(4-4\sqrt{2}i-2)$$

$$=-1-2\sqrt{2}i-2+4\sqrt{2}i$$

$$=-3+2\sqrt{2}i \quad \text{الصورة العادية}$$

الطريقة ثانية:

$$[(1-\sqrt{2}i)-(2-\sqrt{2}i)]\,[(1-\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)]$$

$$=[1-\sqrt{2}i-2+\sqrt{2}i][1-\sqrt{2}i+2-\sqrt{2}i]$$

$$=[-1][3-2\sqrt{2}i]$$

(2021/"تمهيدي"احيائي")

$$=-3+2\sqrt{2}i$$

س/ ضع بالصيغة العادية : $\frac{(1+i)^2}{(1+2i)^2}-\frac{(1-i)^2}{(1-2i)^2}$

sol :

(2/2021 "احيائي")

$$\frac{(1+i)^2}{(1+2i)^2}-\frac{(1-i)^2}{(1-2i)^2}$$

$$=\frac{1+2i+i^2}{1+4i+4i^2}-\frac{1-2i+i^2}{1-4i+4i^2}$$

$$=\frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{1+4i-4}-\frac{\cancel{1}-2i-\cancel{1}}{1-4i-4}$$

$$=\frac{2i}{-3+4i}-\frac{-2i}{-3-4i}$$

$$=\frac{2i(-3-4i)+2i(-3+4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$=\frac{-6i-\cancel{8i^2}-6i+\cancel{8i^2}}{9+16}$$

$$=\frac{-12i}{25}=0-\frac{12i}{25}$$

س/ اثبت ان: $\frac{1}{(3+i)^2}+\frac{1}{(3-i)^2}=\frac{4}{25}$

sol :

الطريقة الأولى:

$$\frac{1}{(3+i)^2}+\frac{1}{(3-i)^2}=\frac{4}{25}$$

(2/2021)

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{1}{9+6i-1}+\frac{1}{9-6i-1}$$

$$=\frac{1}{8+6i}+\frac{1}{8-6i} \quad \text{(توحيد مقامات)}$$

$$=\frac{(8-6i)+(8+6i)}{(8+6i).(8-6i)}$$

$$=\frac{16}{64+36}$$

$$=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}=\text{الطرف الايمن}$$

الطريقة الثانية:

$$\text{الطرف الايسر}=\frac{1}{(3+i)^2}+\frac{1}{(3-i)^2}$$

$$=\frac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)^2\,(3-i)^2}$$

$$=\frac{9-6i-1+9+6i-1}{[(3+i)(3-i)]^2}$$

$$=\frac{16}{(9+1)^2}=\frac{16}{(10)^2}=\frac{16}{100}$$

$$=\frac{4}{25}=\text{الطرف الايمن}$$

س/ اثبت ان : $\sqrt{(1-i)(i^2-1)(1-i^3)}=2i$

sol :

$$\sqrt{(1-i)(i^2-1)(1-i^3)}=2i \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$=\sqrt{(1-i)(-1-1)(1+i)}$$

(1/2021"تطبيقي")

$$=\sqrt{-2(1+1)}$$

$$=\sqrt{-4}=2i=\quad \text{الطرف الايمن}$$

س اذا علمت ان $x = 2 + 3i$ جد $x^2 - 3x + \sqrt{-16}$ بالصيغة العادية

sol :

$x^2 - 3x + \sqrt{-16}$ $\qquad$ $x^2 - 3x + \sqrt{-16}$

نعوض قيمة x

$$= (2 + 3i)^2 - 3(2 + 3i) + \sqrt{16}i$$

$$= 4 + 12i - 9 - 6 - 9i + 4i)$$

$$= -11 + 7i$$

(2023/"تمهيدي"احيائي")

س اثبت ان: $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right) = 1$

sol :

الطريقة الأولى:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)$$

الطرف الأيسر

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)$$

$$= \left(\frac{3 + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 1}{3 + 1}\right) + \left(\frac{3 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 1}{3 + 1}\right)$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1 = \text{الطرف الايمن}$$

(3/2023 "احيائي")

الطريقة الثانية:

الطرف الايسر

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right) \quad \text{توحيد المقامات}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i) + (\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+i)^2 + (\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3}i - 1 + 3 - 2\sqrt{3}i - 1}{4}$$

$$= \frac{2 + 2}{4} = 1 = \text{الطرف الايمن}$$

س اثبت ان: $\frac{1}{(1+\sqrt{3}i)^2} + \frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^2} = \frac{-1}{4}$

sol :

$$\frac{1}{(1+\sqrt{3}\,i)^2} + \frac{1}{(1-\sqrt{3}\,i)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{1+2\sqrt{3}i-3} + \frac{1}{1-2\sqrt{3}i-3}$$

$$= \frac{1}{-2+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{-2-2\sqrt{3}i}{-2-2\sqrt{3}i} + \frac{1}{-2-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{-2+2\sqrt{3}i}{-2+2\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4+12} + \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4+12}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i-2+2\sqrt{3}i}{16}$$

(2/2024 "محاولات")

$$= \frac{-4}{16}$$

$$= \frac{-1}{4} \quad \text{الطرف الايمن}$$

ملاحظة : **اذا حل الطالب بطريقة توحيد المقامات بدل مرافق المقام وكان الحل صحيحاً يعطى درجة كامل**

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(2x+i)(y-2i) = -2-9i$

sol :

$(2xy+2) + (-4x+y)i = -2-9i$

$2xy + 2 = -2$

(1/1996)

$\rightarrow 2xy = -4$ .... (1

$-4x + y = -9$

$\rightarrow y = 4x - 9$ .... (2

نعوض (2) في (1)

$2x(4x-9) = -4$

$\rightarrow [8x^2 - 18x + 4 = 0] \div 2$

$\rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$

$(4x-1)(x-2) = 0$

$\rightarrow 4x - 1 = 0 \ \rightarrow 4x = 1$ اما $x = \frac{1}{4}$ نعوضها في (2)

$y = 4x - 9$

$\rightarrow y = 4\frac{1}{4} - 9 \qquad \therefore y = 1 - 9 = -8$

او $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ نعوضها في (2)

$y = 4x - 9 \rightarrow y = 4(2) - 9$

$\therefore y = 8 - 9 = -1$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

sol :

$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

$\rightarrow 9x^2 + 12xyi + 4y^2i^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = \frac{200(4-3i)}{25}$

$\rightarrow (9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 8(4-3i)$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 32 - 24i$

$9x^2 - 4y^2 = 32$ .... (1)

$12xy = -24$

(2/1999)

$\rightarrow y = \frac{-2}{x}$ .... (2)

نعوض (2) في (1)

$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32$

(3/2023"أحياني")

$\rightarrow \left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] . x^2$

$9x^4 - 16 = 32x^2$

$\rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$

$(9x^2+4)(x^2-4) = 0$

$\rightarrow$ اما $9x^2 + 4 = 0$ غير ممكن لانه مجموع مربعين

او $x^2 = 4 \rightarrow$ اما $x = 2$ نعوضها في(1)

$\rightarrow y = -1$, او $x = -2$ نعوضها في(1)

$\rightarrow y = 1$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

sol :

$(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$\rightarrow (-2x + 2i - x^2i + x\,i^2) = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y+7i}$

$(-2x - x) + (2 - x^2)i = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$

$\rightarrow (-3x) + (2 - x^2)i = 3y - 7i$

$-3x = 3y$

$\rightarrow -x = y$ .... (1)

$2 - x^2 = -7$

(2/1998)

$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

$x = 3 \rightarrow$ (1)نعوضها في

$y = -3 \ , \ x = -3$ (1)نعوضها في

$\rightarrow y = 3$

س/ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق

$x(x+i)+y(y-i)+i=13$

sol :

$(x^2+xi)+(y^2-yi)=13-i$

$\rightarrow (x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

$x^2+y^2=13 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ (2/2000)

$x-y=-1$

$\rightarrow x=y-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$(y-1)^2+y^2=13$

$\rightarrow y^2-2y+1+y^2-13=0$

$\rightarrow 2y^2-2y-12=0$

$y^2-y-6=0$

$\rightarrow (y-3)(y+2)=0$

اما $y=3$ نعوضها في(2)

$\rightarrow x=3-1=2$, او $y=-2$ نعوضها في(2)

$\rightarrow x=-2-1=-3$

س/ جد قيمتي x, y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة

$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$

sol :

$\frac{x^2-4i^2}{x+2i}=\frac{y}{1+i}$ (3/2003)

$\rightarrow \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i}=\frac{y}{1+i}$

$\rightarrow x-2i=\frac{y}{1+i}$

$(x-2i)(1+i)=y$

$\rightarrow (x+2)+(x-2)i=y+0i$

$x+2=y \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$x-2=0$

$\rightarrow x=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$y=2+2=4$

س/ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

sol :

$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}\right)$

$\left(\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}\right)x$

$+\left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}\right)y=-i$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi\right)+(y-yi)=0-i$

$\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(-\frac{3}{2}x-y\right)i=0-i$

$\frac{1}{2}x+y=0 \quad \rightarrow x+2y=0$

$\rightarrow x=-2y \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ (2/2004)

$-\frac{3}{2}x-y=-1$ (2/2005)

$\rightarrow -3x-2y=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (1) في (2)

$-3(-2y)-2y=-2$

$\rightarrow 6y-2y=-2$

$\rightarrow 4y=-2 \quad \rightarrow y=\frac{-1}{2}$

$\rightarrow x=(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)=1$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$(x+i)(y-3i) = -1-13i$

sol :

$xy - 3ix + iy - 3i^2 = -1 - 13i$

$(xy+3) + (-3x+y)i = -1-13i$

$xy + 3 = -1$

$\rightarrow xy = -4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$-3x + y = -13$

$\rightarrow y = 3x - 13 \ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$

نعوض (2) في (1)

$x(3x-13) = -4$

$\rightarrow 3x^2 - 13x + 4 = 0$

(2006/"تمهيدي")

$\rightarrow (3x-1)(x-4) = 0$

اما $x = \frac{1}{3}$ نعوضها في(2)

$\rightarrow y = 3(\frac{1}{3}) - 13 = 1 - 13 = -12$

او $x = 4 \rightarrow (2)$ نعوضها في

$y = 12 - 13 = -1$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$(3x-i)(2y+i) + 11 = 7i$

sol :

$: 6xy + 3xi - 2yi - i^2 = -11 + 7i$

$\rightarrow (6xy+1) + (3x-2y)i = -11 + 7i$

$6xy + 1 = -11$

$\rightarrow 6xy = -12$

$\rightarrow y = \frac{-2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3x - 2y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$\left[3x + \frac{4}{x} = 7\right].x$

(2/2006)

$\rightarrow 3x^2 + 4 = 7x$

(1/2024"محاولات أحياني")

$\rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0$

$\rightarrow (3x-4)(x-1) = 0$

اما $x = \frac{4}{3} \rightarrow (1)$نعوضها في

$y = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -2\left(\frac{3}{4}\right),$

$= \frac{-3}{2}$ او $x = 1 \rightarrow (1)$نعوضها في

$y = \frac{-2}{1} = -2$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $y + 5i = (2x+i)(x+i)$

sol :

$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi + i^2$

(2/2008)

$\rightarrow y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$

$2x^2 - 1 = y \ldots\ldots\ldots (1)$

$3x = 5$

(2020/"تمهيدي"احياني")

$\rightarrow x = \frac{5}{3} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = y,$

$\rightarrow y = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50-9}{9} = \frac{41}{9}$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$(3+2i)^2 y = (x+3i)^2$

sol :

$(9+12i+4i^2)y = (x^2+6ix+9i^2)$

$(5+12i)y = (x^2-9)+6ix$

$\rightarrow 5y+12yi = (x^2-9)+6ix$

$5y = x^2-9 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$12y = 6x$

$\rightarrow x = 2y \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$5y = 4y^2-9$

$\rightarrow 4y^2-5y-9 = 0$

$\rightarrow (4y-9)(y+1) = 0$

(2009/"تمهيدي")

اما $y = \frac{9}{4}$ نعوضها في (2)

$\rightarrow x = 2\frac{9}{4} \ \rightarrow x = \frac{9}{2}$

او $y = -1$ نعوضها في (2)

$\rightarrow x = 2(-1) \ \rightarrow x = -2$

س جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{5}{x+yi}, \frac{2+i}{3-i}$ مترافقان

sol :

$\overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{2-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}\right) = \frac{5}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{10}\right) = \frac{5}{x+yi}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i = \frac{5}{x+yi}$

$\rightarrow 1-i = \frac{10}{x+yi}$

(1/2012)

$\rightarrow x+yi = \frac{10}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$

(2023/"تمهيدي"احيائي")

$\rightarrow x+yi = \frac{10(1+i)}{2}$

$x+yi = 5+5i$

$\rightarrow x = 5 \ , y = 5$

س جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$12+5i = (x+3i)(y-2i)$

sol :

$12+5i = xy-2xi+3yi-6i^2$

$\rightarrow 12+5i = (xy+6)+(-2x+3y)i$

$xy+6 = 12$

$\rightarrow xy = 6$

$\rightarrow y = \frac{6}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$-2x+3y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$\left[-2x+3\frac{6}{x} = 5\right].x$

$\rightarrow -2x^2+18 = 5x$

(1/2010)

$\rightarrow 2x^2+5x-18 = 0$

$(2x+9)(x-2) = 0$

اما $x = \frac{-9}{2}$ $\rightarrow$ نعوضها في(1)

$y = \frac{6}{\frac{-9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right)$

$\rightarrow y = \frac{-4}{3}$

, او $x = 2$ نعوضها في(1)

$\rightarrow y = \frac{6}{2} \rightarrow y = 3$

س جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان
$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi) = (1+2i)^2$

sol :

$\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+(x+yi) = (1+4i+4i^2)$

$\rightarrow \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)+(x+yi) = (1+4i-4)$

$(0-i)+(x+yi) = -3+4i$

$\rightarrow (x)+(-1+y)i = -3+4i$

$x = -3$

$-1+y = 4$

(1/2012"خارج القطر")

$\rightarrow y = 5$

جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i}, \frac{6}{x+yi}$ مترافقان

sol :

$$\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)} = \frac{6}{x+yi}$$

$$\to \left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi}$$

$$\to \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right) = \frac{6}{x+yi}$$

$$1-i = \frac{6}{x+yi}$$

$$\to x+yi = \frac{6}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$

$$\to x+yi = \frac{6(1+i)}{2}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$$\to x = 3 \quad , y = 3$$

(3/2015)

("تمهيدي"/2017)

("تمهيدي" "تطبيقي"/2020)

جد قيمتي x, y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة $\frac{125}{11+2i}x + (1-i)^2 y = 11$

sol :

$$\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}x + (1-2i+i^2)y = 11$$

$$\to \frac{125(11-2i)}{125}x + (-2i)y = 11$$

$$(11x - 2xi) + (0 - 2yi) = 11$$

$$\to (11x) + (-2x-2y)i = 11 + 0i$$

$$11x = 11 \quad \to x = 1 \ ,$$

$$-2x - 2y = 0 \quad \to -x - y = 0$$

$$\to -1 - y = 0$$

$$\to y = -1$$

$$\to y = 1$$

("تمهيدي"/2016)

جد قيمتي $x, y \in R$ اذا علمت ان $(x+2i)(x-i) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$

sol :

$$(x^2 - xi + 2xi - 2i^2) = \frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$$

$$(x^2+2) + (-x+2x)i = \frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$$

$$(x^2+2) + (x)i = 11 - 3yi$$

$$x^2 + 2 = 11 \to x^2 = 9$$

$$\to x = \pm 3$$

$$x = -3y$$

$$\to x = 3 \quad \to 3 = -3y$$

$$\to y = -1 \ , x = -3$$

$$\to -3 = -3y$$

$$\to y = 1$$

(2/2016)

اذا كان $\frac{x-yi}{1+5i}, \frac{3-2i}{i}$ عددان مركبان مترافقان,
فجد قيمة كل من y, x

sol :

$$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} = \frac{3-2i}{i}$$

$$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$$

$$i(x+yi) = (3-2i)(1-5i)$$

$$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$\to -y + xi = -7 - 17i$$

$$\therefore x = -17$$

$$\to -y = -7 \quad \to y = 7$$

(3/2016)

ملاحظة / يمكن للطالب ان ياخذ $\overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)} = \frac{x-yi}{1+5i}$
ويكمل الحل بشكل مضبوط

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ إذا علمت ان:

$$\frac{1-i}{1+i}x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$$

sol :

$$\frac{1-i}{1+i}x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}\right)x + (1+6i-9)y = 1+3i-i+3$$

$$\left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)x + (-8+6i)y = 4+2i$$

$$-xi - 8y + 6yi = 4+2i$$

$$-8y + (-x+6y)i = 4+2i$$

$$-8y = 4$$

$$\rightarrow y = \frac{-4}{8}$$

(1/2018"خارج القطر")

$$\rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

(2024/"تمهيدي")

$$-x + 6y = 2$$

$$\rightarrow -x + 6\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

$$\rightarrow -x - 3 = 2$$

$$\rightarrow x = -5$$

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين اذا علمت ان

$$\frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

sol :

$$\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2} = \frac{1}{3+i+3xi+xi^2}$$

$$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)} = \frac{1}{(3-x)(1+3x)i}$$

$$\therefore x+yi = (3-x)+(1+3x)i$$

وحسب تساوي العددين المركبين:

$$x = 3-x$$

$$\rightarrow x + x = 3$$

$$\rightarrow 2x = 3$$

(1 /2019)

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = 1+3x$$

$$\rightarrow y = 1 + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{9}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{11}{2}$$

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$$

sol :

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$$

$$\frac{y}{1+i}.\frac{1-i}{1-i} = \frac{x^2-9i^2}{x+3i}$$

$$\rightarrow \frac{y-yi}{1+1} = \frac{(x-3i)(x+3i)}{x+3i}$$

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{2}i = x - 3i$$

(2018/"تمهيدي")

$$\frac{y}{2} = x \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{-y}{2} = -3$$

$$\rightarrow y = 6 \dots\dots\dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\frac{6}{2} = x \rightarrow \quad x = 3$$

ملاحظة/ يمكن للطالب ان يضرب الطرف الايمن بالمرافق دون تغير اشارة البسط ويكمل الحل بشكل صحيح. او يضرب الطرفين في الوسطين

س/ اذا كان $y = \frac{3-i}{1+i}$ و $x = (3-2i)^2$, جد x, y بالصيغة العادية ثم اثبت ان : $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$

sol :

$$x = (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4$$

$$= 5 - 12i$$

$$y = \frac{3-i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{1+1}$$

(3 /2019)

$$= \frac{3-4i}{2} = 1 - 2i$$

الطرف الايسر $\overline{x+y} = \overline{(5-12i)+(1-2i)}$

$$= \overline{6-4i} = 6+14i$$

الطرف الايمن $\overline{x} + \overline{y} = \overline{(5-12i)} + \overline{(1-2i)}$

$$= 5 + 12i + 1 + 2i$$

$$= 6 + 14i$$

$$\therefore \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$$

او الطرف الايمن = الطرف الايسر

س: جد $x, y \in R$ اذا علمت ان: $\left(\frac{1+5i}{1+i}\right)x - \left(\frac{7-i}{3+i}\right)y = \frac{-3}{i}$

sol :

الطريقة الأولى:

$$\left(\frac{1+5i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x - \left(\frac{7-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}\right)y = \frac{-3}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{1-i+5i+5}{1+1}\right)x - \left(\frac{21-7i-3i-1}{9+1}\right)y = \frac{3i}{-i^2}$$

$$\left(\frac{6+4i}{2}\right)x - \left(\frac{20-10i}{10}\right)y = 3i$$

$$(3+2i)x - (2-i)y = 3i$$

$$3x + 2xi - 2y + yi = 3i$$

$3x - 2y = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$2x + y = 3 \ldots\ldots\ldots (2)$ تحل آنيا

$3x - 2y = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$4x + 2y = 6 \ldots\ldots\ldots (2)$

بالجمع

$$7x = 6 \implies x = \frac{6}{7}$$

$$3\left(\frac{6}{7}\right) - 2y = 0 \ ] * 7$$

(2 / 2021)

$$18 - 14y = 0$$

$$14y = 18$$

$$y = \frac{18}{14} \implies y = \frac{9}{7}$$

الطريقة الثانية:

$$\left(\frac{1+5i}{1+i}\right)x - \left(\frac{7-i}{3+i}\right)y = \frac{-3}{i}.[(1+i).(3+i)]$$

$$(1+5i).(3+i)x - (7-i)(1+i)y = 3i\,(2+4i)$$

$$(-2+16i)x - (8+6i)y = 6i - 12$$

$$-2x - 8y + 16xi - 6yi = -12 + 6i$$

$$-2x - 8y = -12 \ ] \div (-2)$$

$x + 4y = 6 \ldots\ldots\ldots (1)$

$8x - 3y = 3 \ldots\ldots\ldots (2)$ تحل آنيا

$8x + 32y = 48 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\mp 8x \pm 3y = \mp 3 \ldots\ldots\ldots (2)$

بالطرح

$$35y = 45 \implies y = \frac{45}{35} \implies y = \frac{9}{7}$$

$$x + 4\left(\frac{9}{7}\right) = 6 \ ] * 7$$

$$7x + 36 = 42 \implies 7x = 6 \implies x = \frac{6}{7}$$

س: جد قيمة x ، y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة :

$$(y + 5i) = (2x + i)(x + 2i)$$

sol :

$$(y + 5i) = (2x + i) * (x + 2i)$$

$$= (2x^2 - 2) + (x + 4x)i$$

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$y = 2x^2 - 2$$

(2020/ "تمهيدي")

$$5 = 5x$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\therefore y = 0$$

س: جد $x, y \in R$, اذا علمت ان $\frac{1-5i}{3-2i}$ ، $\frac{-2}{x+yi}$ مترافقان

sol :

بما ان العددين مترافقين

$$\frac{-2}{x+yi} = \overline{\left(\frac{1-5i}{3-2i}\right)}$$

$$\frac{-2}{x+yi} = \frac{1+5i}{3+2i} \qquad *$$

ملاحظة :- اذا قام الطالب من الخطوة * وبالضرب الطرفين في الوسطين وبسط الحل تعطى درجة الخطوة كاملة

$$\frac{x+yi}{-2} = \frac{3+2i}{1+5i}\cdot\frac{1-5i}{1-5i}$$

$$\frac{x+yi}{-2} = \frac{3-15i+2i+10}{1+25}$$

$$\frac{x+yi}{\cancel{-2}_{\,1}} = \frac{13-13i}{\cancel{26}_{\,13}}$$

(1 /2020)

$$x + yi = \frac{-(13-13i)}{13}$$

$$x + yi = -1 + i$$

$$\therefore x = -1 \quad , \quad y = 1$$

س جد قيمة كل من x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة :

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$$

sol :

$2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$

الحقيقي = الحقيقي

(2020 / "تمهيدي "تطبيقي")

$2x - 1 = 1$

$2x = 2 \Rightarrow x = 1$

التخيلي = التخيلي

$2 = y + 1$

$y = 1$

س اذا كان $\frac{3+i}{2-i}$ و $\frac{x+yi}{3+4i}$ عددان مترافقان , جد $x, y \in R$

sol :

$\frac{x+yi}{3+4i} , \frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

ملاحظة : اذا ساوى العددين بدون اخذ المرافق وباقي الخطوات صحيحة يعطى (3) درجات

(2023 /2"أحيائي")

(2023 /3"تكميلي")

$\therefore \frac{x+yi}{3+4i} = \overline{\frac{3+i}{2-i}}$

$\frac{x+yi}{3+4i} = \frac{3-i}{2+i}$

$\therefore x + yi = \frac{(3+4i)(3-i)}{2+i}$

$= \frac{9-3i+12i+4}{2+i}$

$= \frac{13+9i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$

$= \frac{26-13i+18i+9}{4+1} = \frac{35+5i}{5}$

$\therefore x + yi = \frac{35}{5} + \frac{5}{5}i \Rightarrow x + yi = 7 + i$

$\therefore x = 7 \quad , \quad y = 1$

س اذا كان $y = \frac{3-i}{1+i}$ و $x = (3-2i)^2$, جد x, y بالصيغة العادية ثم اثبت ان : $\overline{x-y} = \overline{x} - \overline{y}$

sol :

$x = (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4$

$= 5 - 12i$

(2023 / 1"أحيائي")

$y = \frac{3-i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{1+1}$

$= \frac{3-4i}{2} = 1 - 2i$

الطرف الايسر $\overline{x-y} = \overline{(5-12i) - (1-2i)}$

$= \overline{5 - 12i - 1 + 2i}$

$= \overline{4 - 10i} = 4 + 10i$

الطرف الايمن $\overline{x} - \overline{y} = \overline{(5-12i)} - \overline{(1-2i)}$

$= 5 + 12i - (1 + 2i)$

$= 4 + 10i$

$\therefore \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$

او الطرف الايمن = الطرف الايسر

س جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{7-6i}{x+yi}, \frac{5-5i}{1-3i}$ مترافقان

sol :

(2024 /2"محاولات")

$\frac{7-6i}{x+yi} = \overline{\left(\frac{5-5i}{1-3i}\right)}$

$\frac{7-6i}{x+yi} = \frac{5+5i}{1+3i}$

$x + yi = \left(\frac{7+21i-6i+18}{5+5i}\right)$

$x + yi = \frac{25+15i}{5+5i} \cdot \frac{5-5i}{5-5i}$

$x + yi = \frac{125 - 125i + 75i + 75}{25+25}$

$x + yi = \frac{200 - 50i}{50}$

$x + yi = \frac{200}{50} - \frac{50i}{50}$

$x + yi = 4 - i$

$\rightarrow x = 4 \quad , y = -1$

ملاحظة : يمكن اخذ المرافق للكسر الأول بدل الثاني

ملاحظة : يمكن ان يبسط الطالب الكسر ثم يأخذ المرافق له

ملاحظة : اذا لم يأخذ الطالب المرافق بالحل واكمله بصورة صحيحة يعطى (3) درجات فقط . بحسب ما ورد من الأجوبة النموذجية لمركز الفحص

3 الاسئلة الوزارية حول "الجذور التربيعية للعدد المركب"

س / اذا كان $c , d \in R$ وكان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$

sol :

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{14-7i-8i-4}{4+1}$$

$$=\frac{10+15i}{5}=2-3i\ \rightarrow c=2,\quad d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}\ =\sqrt{4+3i}$$

$$\sqrt{4+3i}=x+yi$$

$$4+3i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

(1 / 1997)

$$x^2-y^2=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2xy=3\rightarrow y=\frac{3}{2x}\ \ldots\ldots\ldots.(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$

$$\rightarrow\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4x^2$$

$$\rightarrow 4x^2-9=16x^2\rightarrow 4x^2-16x^2-9=0$$

$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

$2x^2+1=0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $2x^2-9=0\rightarrow 2x^2=9\rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow y=\left(\frac{3}{\pm2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}\right)\rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ans: $\sqrt{4+3i}=\ \{\pm(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)\}$

س / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

sol :

$$\frac{14+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{14-14i+2i-2i^2}{2}$$

$$=\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$\sqrt{8-6i}=x+yi$ بتربيع الطرفين

$$8-6i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

$$x^2-y^2=8\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2xy=-6\qquad\rightarrow y=\frac{-6}{2x}=\frac{-3}{x}\ \ldots\ldots\ldots.(2)$$

نعوض (2) في (1)

(2 / 2009)

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\rightarrow\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2$$

$$\rightarrow x^4-9=8x^2\rightarrow x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

$x^2+1=0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2-9=0\quad\rightarrow x^2=9\quad\rightarrow x=\pm3$

$$\rightarrow y=\left(\frac{-3}{\pm3}\right)\quad\rightarrow y=\pm1$$

ans: $\sqrt{8-6i}=\{\pm(3-i)\}$

س / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $3+4i$

(1 / 2007)

sol :

$\sqrt{3+4i} = x + yi$

$3 + 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 4 \quad \rightarrow y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right].x^2$

$\rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

اما $x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

او $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{2}{\pm 2}\right) \rightarrow y = \pm 1$

ans: $\sqrt{3+4i} = \{\pm(2+i)\}$

س / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$

(1 / 2010)

sol :

$(-1+7i)(1+i) = -1 - i + 7i + 7i^2 = -8 + 6i$

$\sqrt{-8+6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8 + 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 6 \rightarrow y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\right].x^2$

$\rightarrow x^4 - 9 = -8x^2$

$\rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

او $x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$\rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 1}\right) \quad \rightarrow y = \pm 3$

ans: $\sqrt{-8+6i} = \{\pm(1+3i)\}$

س / اذا كانت $a, b \in R, a + bi = \frac{7-4i}{2+i}$ جد قيمة

$\sqrt{2a - ib}$

("خارج القطر" 1 / 2019)

sol :

$a + bi = \frac{7-4i}{2+i} * \frac{2-i}{2-i}$

$a + bi = \frac{14-7i-8i-4}{4+1}$

$a + bi = \frac{10-15i}{5} \Rightarrow \quad a + bi = \frac{10}{5} - \frac{15i}{5}$

$a + bi = 2 - 3i$

$a = 2 \qquad b = -3$

$\sqrt{2a - bi} = \sqrt{2(2) - (-3)i} = \sqrt{4+3i}$

$\sqrt{4+3i} = x + yi \qquad x, y \in R$

$4 + 3i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$

$\left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] * 4x^2$

$4x^4 - 9 = 16x^2$

$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$

$(2x^2 - 9)\underbrace{(2x^2 + 1)}_{\text{يهمل}} = 0$

$2x^2 = 9 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ عند

$y = \frac{3}{2\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$C_2 = \frac{-3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد 27

(2 / 2001)

sol :

$let\ Z = \sqrt[3]{27} \rightarrow Z^3 = 27$

$\rightarrow Z^3 - 27 = 0$

$(Z-3)(Z^2+3Z+9) = 0$

اما $Z = 3$, او $Z^2 + 3Z + 9 = 0$

$a = 1 \ , b = 3 \ , c = 9$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.9}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\rightarrow ans: \{3, \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$$

س/ اذا كان $c + di = \frac{5-i}{1+i}$ ، جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(4c - 2di)$

2/2023"احيائي"

sol :

$$c + di = \frac{5-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$c + di = \frac{5-5i-i-1}{1+1} = \frac{4-6i}{2}$$

$\therefore c + di = 2 - 3i$

$\therefore c = 2 \quad , \ d = -3$

$\therefore 4c - 2di = 4(2) - 2(-3)i = 8 + 6i$

$\therefore \sqrt{4c - 2di} = \sqrt{8+6i}$

نفرض $\sqrt{8+6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8 + 6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$\therefore 8 = x^2 - y^2 \quad \dots\dots\dots (1)$

$2xy = 6 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

من معادلة (2) $\quad y = \frac{3}{x}$ نعوضها بـ(1)

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \ \Rightarrow \ x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\ ] .\ x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2 \ \Rightarrow \ x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2-9)(x^2+1)_{\text{يهمل}} = 0$

$\therefore x^2 - 9 = 0 \ \Rightarrow \ x = 9 \ \Rightarrow \ x = \mp 3$

$x^2 + 1 \neq 0$ يهمل

$\therefore y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} \ \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ الجذر الاول $= 3 + i$

$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{-3} \ \Rightarrow y = -1$

الجذر الثاني $-3 - i$

الجذور $[3 + i, -3 - i]$

جد الجذر التربيعية للعدد المركب $\frac{7+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

Sol:

$$\frac{7+\mathrm{wi}+\mathrm{w}^2\mathrm{i}}{1-\mathrm{wi}-\mathrm{w}^2\mathrm{i}}=\frac{7+\mathrm{i}(\mathrm{w}+\mathrm{w}^2)}{1-\mathrm{i}(\mathrm{w}+\mathrm{w}^2)}$$

$$=\frac{7-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}*\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{7-7\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}$$

$$=\frac{6-8i}{2}=3-4i$$

$$\sqrt{3-4i}=x+yi$$

$$3-4i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

1/1998

$$x^2-y^2=3\;\ldots\ldots(1$$

$$2xy=-4\;\ldots.(2\;,$$

$$y=\frac{-4}{2x}=-\frac{2}{x}\;\ldots..(3\quad in(1)$$

$$x^2-\left(\frac{-2}{x}\right)^2=3$$

$$\to\left[x^2-\frac{4}{x^2}=3\right]*x^2$$

$$\to x^4-4=3x^2$$

$$\to x^4-3x^2-4=0$$

$$(x^2-4)(x^2+1)=0$$

اما $x^2+1=0$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2-4=0\;\to x^2=4\to x=\pm2$

$$\to y=\left(\frac{-2}{\pm2}\right)\to y=\mp1$$

$$\sqrt{3-4i}=\{\pm(2-i)\}$$

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $\frac{1+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

Sol:

$$\frac{1+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}=\frac{1+i(w+w^2)}{1-i(w+w^2)}=\frac{1-i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{1-i-i+i^2}{2}$$

$$=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\sqrt{-i}=x+yi$ بتربيع الطرفين

$$x^2-y^2=0\;\ldots.(1$$

$$2xy=-1\;\ldots\ldots.(2\;,$$

2/2005

(2024/"تمهيدي")

$$y=\frac{-1}{2x}\;\ldots.(3\;\;in(1)$$

$$x^2-\left(\frac{-1}{2x}\right)^2-0$$

$$\to\left[x^2-\frac{1}{4x^2}=0\right]*4x^2\to4x^4-1=0$$

$$(2x^2-1)(2x^2+1)=0$$

$(2x^2+1)=0$ يهمل

$$2x^2-1=0\to2x^2=1$$

$$\to x^2=\frac{-1}{2}\to x=\pm\frac{-1}{\sqrt2}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$\to y=\frac{-1}{2*\frac{1}{\sqrt2}}=\frac{-1}{\sqrt2}\;,$$

$$x=\frac{-1}{\sqrt2}$$

$$\to y=\frac{-1}{2*\frac{-1}{\sqrt2}}=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$ans:\left\{\pm\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right)\right\}$$

4 الاسئلة الوزارية حول " الجذور التكعيبية للواحد الصحيح"

س برهن ان: $3(w^{14}-w^{7}-1)=2(w^{10}+w^{5}-2)$

Sol :

$$3(w^{14}-w^{7}-1)=3(w^{2}+w-1)$$
$$=3(-1-1)=-6$$
$$2(w^{10}+w^{5}-2)=2(w+w^{2}-2)$$
$$=2(-1-2)=-6$$

1/1998

س اذا كان $x=2+\sqrt{3}i\,, y=2-\sqrt{3}i$ جد قيمة $x^{2}w+y^{2}w^{2}$

Sol :

$$x^{2}=\left(2+\sqrt{3}i\right)^{2}$$
$$=4+4\sqrt{3}i+3i^{2}=1+4\sqrt{3}\,i$$
$$y^{2}=\left(2-\sqrt{3}i\right)^{2}$$
$$=4-4\sqrt{3}i+3i^{2}=1-\sqrt{3}i$$
$$x^{2}w+y^{2}w^{2}=\left(1+4\sqrt{3}\,i\right)w+\left(1-\sqrt{3}i\right)w^{2}$$
$$=\left(w+4w\sqrt{3}i\right)+\left(w^{2}-4w^{2}\sqrt{3}i\right)$$
$$=(w+w^{2})+4\sqrt{3}i(w-w^{2})$$
$$=-1+4\sqrt{3}i(w-w^{2})$$
$$=-1+4\sqrt{3}i\,(\pm\sqrt{3}i)$$
$$=-1\pm 12i^{2}=-1\pm 12=\{-13,11\}$$

2/1999

س جد قيمة المقدار $(2+w^{2})+(2+w)$

Sol :

$$(2+w^{2})+(2+w)$$
$$=4+w+w^{2}$$
$$=4-1=3$$

2/2004

س برهن ان $(1+w^{2})^{3}+(1+w)^{3}=-2$

Sol:

$$(1+w^{2})^{3}+(1+w)^{3}$$
$$=(-w)^{3}+(-w^{2})^{3}$$
$$=-w^{3}-w^{6}=-1-1=-2$$

2005/"تمهيدي"

س جد قيمة : $(4+5w+4w^{2})^{6}$

Sol :

$$(4+5w+4w^{2})^{6}$$
$$=[4(1+w^{2})+5w]^{6}$$
$$=(-4w+5w)^{6}=w^{6}=1$$

2008/"تمهيدي"

س جد قيمة: $\left(\frac{1}{1+w^{2}}-\frac{1}{1+w}\right)^{2}$

Sol :

$$\left(\frac{1}{1+w^{2}}-\frac{1}{1+w}\right)^{2}$$
$$=\left(\frac{1}{-w}-\frac{1}{-w^{2}}\right)^{2}=\left(\frac{w^{3}}{-w}-\frac{w^{3}}{-w^{2}}\right)^{2}=(-w^{2}-w)^{2}$$
$$=w^{4}-2w^{3}+w^{2}=w-2+w^{2}$$
$$=-1-2=-3$$

1/2000

س جد قيمة $(2+3w^{2}+w)^{2}$

Sol :

$$(2+3w^{2}+w)^{2}$$
$$=[1+1+w^{2}+2w^{2}+w]^{2}$$
$$=(1+2w^{2})^{2}$$
$$=1+4w^{2}+4w^{4}$$
$$=1+4(w^{2}+w)$$
$$=1-3=-3$$

2/2001

س جد قيمة المقدار $\left(4+\frac{3}{w}+w^{2}\right)\left(3+\frac{2}{w^{2}}+w\right)$

Sol :

$$\left(4+\frac{3}{w}+w^{2}\right)\left(3+\frac{2}{w^{2}}+w\right)$$
$$=\left(4+\frac{3w^{3}}{w}+w^{2}\right)\left(3+\frac{2w^{3}}{w^{2}}+w\right)$$
$$=(4+3w^{2}+w^{2})(3+2w+w)$$
$$=(4+4w^{2})(3+3w)$$
$$=[4(1+w^{2})][3(1+w)]$$
$$=(-4w)(-3w^{2})=12w^{3}=12$$

2009/"تمهيدي"

س جد بأبسط صورة $w(1+i)^{4}-(5+3w+5w^{2})^{2}$

Sol :

$$w(1+i)^{4}-(5+3w+5w^{2})^{2}$$
$$=w[(1+i)^{2}]^{2}-[3w+5(1+w^{2})]^{2}$$
$$=w(1+2i+i^{2})^{2}-(3w-5w)^{2}$$
$$=w(2i)^{2}-(-2w)^{2}=-4w-4w^{2}$$
$$=-4(w+w^{2})=4$$

1/2009

1/2014 "خارج القطر"

س جد قيمة المقدار $\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{w}+3\sqrt{2}w\right)^2\left(1+\frac{1}{w}+4w\right)$

Sol :

2/2010

$$\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{w}+3\sqrt{2}w\right)^2\left(1+\frac{1}{w}+4w\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}w^3}{w}+3\sqrt{2}w\right)^2\left(1+\frac{w^3}{w}+4w\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,w^2+3\sqrt{2}w\right)^2(1+w^2+4w)$$
$$=\left[\sqrt{2}(1+w^2)+3\sqrt{2}w\right]^2[-w+4w]$$
$$=\left(-\sqrt{2}w+3\sqrt{2}w\right)^2(3w)=\left(2\sqrt{2}w\right)^2(3w)$$
$$=(8w^2)(3w)=24w^3=24$$

س اثبت ان $\left(1-\frac{2}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5}{w}\right)=18$

Sol :

2/2010

$$\left(1-\frac{2}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5}{w}\right)$$
$$=\left(1-\frac{2w^3}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5w^3}{w}\right)$$
$$=(1-2w+w^2)(1+w-5w^2)$$
$$=(-w-2w)(-w^2-5w^2)$$
$$=(-3w)(-6w^2)=18w^3=18$$

س اثبت ان $\left(\frac{5w^2\,i-1}{5+i\,w}\right)^6=-1$

Sol :

2/2014

$$\left(\frac{5w^2\,i-1}{5+i\,w}\right)^6$$
$$=\left(\frac{5w^2i-1(-i^2.w^3)}{5+i\,w}\right)^6$$
$$=\left(\frac{5w^2i+i^2.w^3}{5+iw}\right)^6$$
$$=\left(\frac{w^2i\,(5+i\,w)}{5+i\,w}\right)^6$$
$$=(w^2i)^6=w^{12}.i^6=-1$$

س اثبت ان $\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right)^{100}=\frac{-1}{8}\left(1-\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)^3$

Sol :

2014/"تمهيدي"

$$L.H.S:\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right)^{100}$$
$$=\left(\frac{(1-i)-(1+i)}{(1+i)(1-i)}\right)^{100}$$
$$=\left(\frac{1-i-1-i}{1+1}\right)^{100}=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{100}=i^{100}=1$$
$$RHS:\frac{-1}{8}\left(1-\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)^3=\frac{-1}{8}\left(\frac{w^3}{w^2}+\frac{w^3}{w}\right)^3$$
$$=\frac{-1}{8}(1-w+w^2)^3=\frac{-1}{8}(-w-w)^3$$
$$=\frac{-1}{8}(2w)^3=\frac{-1}{8}(-8w^3)=1$$

س جد ناتج $\left(3w^{9n}+\frac{5}{w^5}+\frac{4}{w^4}\right)^6$

Sol :

1/2014"اسئلة النازحين"

$$\left(3w^{9n}+\frac{5}{w^5}+\frac{4}{w^4}\right)^6$$
$$=\left(3(w^9)^n+\frac{5w^3}{w^2}+\frac{4w^3}{w}\right)^6=(3+5w+4w^2)^6$$
$$=[3+5w+4(-1-w)]^6=(3+5w-4-4w)^5$$
$$=[-1-w]^6=[(-1+w)^2]^3$$
$$=(1-2w+w^2)^3=(-3w)^3=-27$$

س اثبت ان $\left(5-\frac{5}{w^2+1}+\frac{3}{w^2}\right)^6=64$

Sol :

(1/2024"محاولات تطبيقي")

$$\left(5-\frac{5}{w^2+1}+\frac{3}{w^2}\right)^6$$
$$=\left(5-\frac{5w^3}{-w}+\frac{3w^3}{w^2}\right)^6=(5+5w^2+3w)^6$$
$$=(5+5w^2+5w-2w)^6$$

1/2016

$$=[5(1+w^2+w)-2w]^6$$
$$=[-2w]^6=64(w)^6=64$$

طريقة اخرى للحل

$$\left(5-\frac{5}{w^2+1}+\frac{3}{w^2}\right)^6=\left(5-\frac{5w^3}{-w}+\frac{5w^3}{w^2}\right)^6$$
$$=(5+5w^2+3w)^6$$
$$=[5(1+w^2)+3w)^6$$
$$=[5(-w)+3w]^6=[-2w]^6$$
$$=64(w)^6=64$$

اثبت ان $\left(\frac{1}{1+3w^2}-\frac{1}{1+3w^4}\right)^2=\frac{-27}{49}$

Sol :

$$\left(\frac{1}{1+3w^2}-\frac{1}{1+3w^4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{1+3w^2}-\frac{1}{1+3w}\right)^2$$

$$=\left(\frac{(1+3w)-(1+3w^2)}{(1+3w^2)(1+3w)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+3w-1-3w^2}{1+3w+3w^2+9w^3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3w-3w^2}{10+3(w+w^2)}\right)^2$$

1/2015 "اسئلة النازحين"

$$=\frac{(3w^2-3w)^2}{(7)^2}$$

$$=\frac{9w^4-18w^3+9w^2}{49}$$

$$=\frac{9w-18+9w^2}{49}$$

$$=\frac{9(w+w^2)-18}{49}=\frac{-9-18}{49}=\frac{-27}{49}$$ الطرف الايمن

اثبت ان $\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}\right)^2.\left(2+\frac{2}{w}\right).\left(\frac{-1}{1+w^2}\right)=6$

Sol :

ناخذ الطرف الايسر

$$\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}\right)^2.\left(2+\frac{2}{w}\right).\left(\frac{-1}{1+w^2}\right)$$

$$=\left(\frac{w^3}{w}-\frac{w^3}{w^2}\right)^2.\left(2+\frac{2w^3}{w}\right).\left(\frac{-w^3}{-w}\right)$$

$$=(w^2-w)^2(2+w^2)(w^2)$$

$$=(w^4-2w^3+w^2)2(1+w^2)(w^2)$$

$$=(w-2+w^2)(2w^2)(-w)$$

$$=\left((w+w^2)-2\right)(-2w^3)$$

3/2017

$$=(-1-1)(-2)$$

$$=(-3)(-2)$$

$=6=$ الطرف الايمن

ملاحظة : بالإمكان ان يحل هذا السؤال بأكثر من طريقة على المصحح .

اثبت ان $\left(2w+\frac{3}{w}+2\right)^2.\left(5+\frac{2}{w^2}+5w^2\right)^2=9$

Sol :

$$\left(2w+\frac{3}{w}+2\right)^2.\left(5+\frac{2}{w^2}+5w^2\right)^2$$

$$=\left[2(w+1)+\frac{3w^3}{w}\right]^2.\left[5(1+w^2)+\frac{2w^3}{w^2}\right]^2$$

$$=[-2w^2+3w^2]^2.[-5w+2w]^2$$

$$=[w^2]^2[-3w]^2=w^4.9w^2=9w^6=9$$

1/2014 "خارج القطر"

هل ان : $\left(\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right)=\frac{-1}{6}$ ؟ بين ذلك

Sol :

L. H. S $\left(\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right)$

$$=\frac{2+w^2-(2+w)}{(2+w)(2+w^2)}$$

2/2019

$$=\frac{2+w^2-2-w}{4+2w^2+w+w^3}$$

$$=\frac{w^2-w}{4+2(w^2+w)+1}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{3}i}{5+2(-1)}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{3}i}{3}\neq\frac{-1}{6}$$

L. H. S $\neq$ R. H. S

اثبت ان $\frac{w^{14}+w^7-1}{w^{10}+w^5-2}=\frac{2}{3}$

Sol :

$$\text{L. H. S}=\frac{w^{14}+w^7-1}{w^{10}+w^5-2}$$

$$=\frac{w^2+w-1}{w+w^2-2}$$

3/2019

$$=\frac{-1-1}{-1-2}$$

$$=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}=\text{R. H. S}$$

س اذا كان $Z^2+Z+1=0$ ، جد قيمة $\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$

Sol :

نحل المعادلة $Z^2+Z+1=0$ بالدستور لايجاد Z

a=1 , b=1 , c=1

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-1\mp\sqrt{1-4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}$$
$$=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اما $Z=W$

او $Z=W^2$

2018/"تمهيدي"تطبيقي"

$$\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$$
$$=\frac{1+3W^{10}+3W^{11}}{1-3W^7-3W^8}$$
$$=\frac{1+3W+3W^2}{1-3W-3W^2}$$
$$=\frac{1+3(W+W^2)}{1-3(W+W^2)}$$
$$=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}$$
$$=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

عندما $Z=W^2$

$$\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}=\frac{1+3(W^2)^{10}+3(W^2)^{11}}{1-3(W^2)^7-3(W^2)^8}$$
$$=\frac{1+3W^{20}+3W^{22}}{1-3W^{14}-3W^{16}}$$
$$=\frac{1+3W^2+3W}{1-3W^2-3W}$$
$$=\frac{1+3(W^2+W)}{1-3(W^2+W)}$$
$$=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

س اثبت ان $\left[\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right]^{100}=\left[\frac{2+3w}{2w^2+3}+\frac{4w^2+1}{4+w}\right]^{200}$

Sol :

$$L.H.S\ \left[\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right]^{100}$$

1/2019

$$=\left[\frac{(1-i)-(1+i)}{(1+i)(1-i)}\right]^{100}$$
$$=\left[\frac{1-i-1-i}{1+1}\right]^{100}=\left[\frac{12i}{2}\right]^{100}=(-i)^{100}=1$$

$$R.H.S\ \left[\frac{2+3w}{2w^2+3}+\frac{4w^2+1}{4+w}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{2w^3+3w}{2w^2+3}+\frac{4w^2+w^3}{4+w}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{2w^3+3w}{2w^2+3}+\frac{4w^2+w^3}{4+w}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{w(2w^2+3)}{2w^2+3}+\frac{w^2(4+w)}{4+w}\right]^{200}$$
$$=[w+w^2]^{200}$$
$$=(-1)^{200}$$
$$=1$$
$$\therefore L.H.S=R.H.S$$

طريقة ثانية :-

$$L.H.S\ \left[\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right]^{100}$$
$$=\left[\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}-\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right]^{100}$$
$$=\left[\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2}\right]^{100}=\left[\frac{1-i-1-i}{2}\right]^{100}=(-1)^{100}=1$$

$$R.H.S\ \left[\frac{2+3w}{2w^2+3}+\frac{4w^2+1}{4+w}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{8+2w+12w+3w^2+8w+12w^2+2w^2+3}{8w^2+2+12+3w}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{11+22w+17w^2}{5w^2+3w^2+3w+14}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{11+5w+17w+17w^2}{5w^2+11}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{11+5w-17}{5w^2+5+6}\right]^{200}=\left[\frac{-6+5w}{-5w+6}\right]^{200}$$
$$=\left[\frac{-(6-5w)}{(6-5w)}\right]^{200}$$
$$=(-1)^{200}$$
$$=1$$
$$\therefore L.H.S=R.H.S$$

س اذا كان $x = \frac{3+4w}{3w^2+4}$, $y = \frac{5-2w^2}{5w-2}$

اثبت ان $(x^2+y^2)^2 = 1$

Sol :

$$x = \frac{3w^3+4w}{3w^2+4} = \frac{w(3w^2+4)}{(3w^2+4)} \rightarrow x = w$$

$$y = \frac{5w^3-2w^2}{5w-2} = \frac{w^2(5w-2)}{(5w-2)} \rightarrow y = w^2$$

$L.H.S\ (x^2+y^2)^2$

2/2023 "تطبيقي"

$= [w^2+w^4]^2 \rightarrow w^4 = (w^3)^1 . w = w$

$= [w^2+w]^2 = [1]^2 = 1 = R.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

س اثبت ان $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \left[\frac{5w^2i-1)}{5+wi}\right]^{12} = i$

Sol :

الطرف الايسر $= \left[\frac{1+i}{1-i} . \frac{1+i}{1+i}\right]^5 \left[\frac{5w^2i+w^2i^2)}{5+wi}\right]^{12}$

$$= \left[\frac{2i}{2}\right]^5 \left[\frac{w^2i\,(5+wi)}{5+wi}\right]^{12}$$

$= i^5 (w^2 i)^{12} \rightarrow = i(w^{24}\, i^{12})$

$= i(w^3)^8\, (i^4)^3 \rightarrow i\,(1)^8\,(1)^3$

2/2024

$= i$ الطرف الايمن

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

س/ حل المعادلة $x^3 + 8i = 0$ في C

sol :

$$x^3 + 8i^3 = 0 \to (x+2i)(x^2 - 2ix + 4i^2) = 0$$

$x = -2i$ او $x^2 - 2ix - 4 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -2i \quad , \quad c = -4$

(2005 / "تمهيدي")

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pm 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \pm\sqrt{3} + i$$

ans: $\{\sqrt{3} + i \ , \ -\sqrt{3} + i \ , -2i\}$

س/ حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$ في C

sol :

$$x^3 - 8i^3 = 0 \to (x-2i)(x^2 + 2ix + 4i^2) = 0$$

$x = 2i$ او $x^2 + 2ix - 4 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 2i \quad , \quad c = -4$

(1 / 2005)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(2i) \pm \sqrt{(2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \pm\sqrt{3} - i$$

ans: $\{\sqrt{3} - i \ , \ -\sqrt{3} - i \ , 2i\}$

س/ حل المعادلة التربيعية الآتية وبين هل ان الجذرين مترافقان ؟ $z^2 - 2zi + 3 = 0$

sol :

طريقة اولى

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$
$$Z^2 - 2zi - 3i^2 = 0$$
$$(Z+i)(Z-3i) = 0$$

ملاحظة :- الجذران غير مترافقين والطالب ان لم يذكر ذلك يخصم منه درجة واحدة

$if \ Z + i = 0 \ \Rightarrow Z = -i$

$Or \ Z - 3i = 0 \ \Rightarrow \ Z = 3i$

$\therefore \ A = \{(0 - i) , (0 + 3i)\}$

طريقة ثانية

$a = 1 , \ b = -2i \ , \ c = 3$

(2020 / "تمهيدي")

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{2i \mp \sqrt{-4-4*3}}{2}$$
$$= \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \mp 4i}{2}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2i + 4i}{2} = 0 + 3i \\ \dfrac{2i - 4i}{2} = 0 - i \end{cases}$$

$\Rightarrow \ A = \{(0 + 3i) , (0 - i)\}$

س/ جد حل المعادلة في C $x^4 + 21x^2 - 100 = 0$

sol :

$$x^4 + 21x^2 - 100 = 0$$

$$(x^2 + 25)(x^2 - 4) = 0$$

اما $x^2 + 25 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = -25$

(2 / 2022 "احيائي")

$\Rightarrow x = \sqrt{-25}$

$\Rightarrow x = \sqrt{25} i$

$\Rightarrow x = \mp 5i$

او $x^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \mp 2$

مجموعة الحل $= \{\mp 5i , \mp 2\}$

ملاحظة : يمكن للطالب اعتماد طريقة القانون العام (الدستور)

س/ حل المعادلة الاتية في C : $Z^2 + 2Z + i(2-i) = 0$

sol :

الطريقة الاولى

$Z^2 + 2Z + i(2-i) = 0$

$(Z+i)(Z+2-i) = 0$

اما $Z + i = 0 \Rightarrow Z = -i$

او $Z + 2 - i = 0 \Rightarrow Z = -2 + i$

$S = \{-i, -2+i\}$

الطريقة الثانية

$Z^2 + 2Z + 2i - i^2 = 0$

$Z^2 - i^2 + 2Z + 2i = 0$

$(Z-i)(Z+i) + 2(Z+i) = 0$

$(Z+i)(Z-i+2) = 0$

اما $Z = -i$

او $Z = -2 + i$ $\quad \therefore S = \{-i, -2+i\}$

الطريقة الثالثة : باستخدام قانون الدستور

$Z^2 + 2Z + 2i + 1 = 0$

$a = 1, b = 2, c = 2i + 1$

$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(1)(2i+1)}}{2(1)}$

(2021 / 1"احيائي")

$= \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 8i - 4}}{2}$

(3/2023"تطبيقي")

$= \frac{-2 \mp \sqrt{-8i}}{2}$

نجد $\sqrt{-8i}$

Let $\sqrt{-8i} = x + yi$

$-8i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$

$2xy = -8 \Rightarrow xy = \frac{-8}{2} \Rightarrow y = \frac{-4}{x} \quad \dots\dots \quad (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{-4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = 0] * x^2$

$x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

اما $x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2 \Rightarrow y = \frac{4}{\pm 2} \Rightarrow y = \mp 2$

او $x^2 + 4 = 0$ يهمل

$\therefore \sqrt{-8i} = \begin{cases} 2 - 2i \\ -2 + 2i \end{cases}$

$Z = \frac{-2 \mp (2-2i)}{2}$

$Z = \frac{-2+2+2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

او $Z = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$

$\therefore S = \{-i, -2+i\}$

س/ جد مجموعة حلول المعادلة في C حيث :

$Z^2 - 3Z + 1 + 3i = 0$

sol :

الطريقة الاولى

$Z^2 - 3Z + 1 + 3i = 0$

$Z^2 - 3Z - i^2 + 3i = 0$

$Z^2 - 3Z + i(-i+3) = 0$

$Z^2 - 3Z + i(3-i) = 0$

$(Z-i)\big(Z-(3-i)\big) = 0$

اما $Z - i = 0 \Rightarrow Z = i$

او $Z - (3-i) = 0 \Rightarrow Z = 3 - i$

الطريقة الثانية :- باستخدام الدستور

$a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = (1+3i)$

$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow Z = \frac{3 \mp \sqrt{9-4(1+3i)}}{2}$

$Z = \frac{3 \mp \sqrt{9-4-12i}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5-12i}}{2}$

بالتربيع $\sqrt{5-12i} = x + yi$ نفرض $\sqrt{5-12i}$ لايجاد

$5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xy\, i$

$x^2 - y^2 = 5 \quad \dots\dots\dots (1)$

$2xy = -12 \quad \dots\dots (2)$

$\Rightarrow y = \frac{-12}{2x} \Rightarrow y = \frac{-6}{x}$

$x^2 - \left(\frac{-6}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5] \,.\, x^2$

نعوض بـ (1)

$x^4 - 36 = 5x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$(x^2+4)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$ يهمل

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$

$\therefore y = \frac{-6}{\mp 3} \Rightarrow y = \pm 2$

(2021 / "تمهيدي"احيائي")

الجذور$\therefore$ $(3-2i)(-3+2i)$

نعوض الجذور بقانون الدستور

$\frac{3+3-2i}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$

$Z = \frac{3 \mp (3-2i)}{2} =$

$\frac{3-3+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$

س: حل المعادلة التربيعية: $Z^2 - 2Zi + 3 = 0$
وهل جذراها مترافقان؟

sol :

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -2i \ , c = 3$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-4 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2} \Longrightarrow Z = \frac{2i \mp \sqrt{16}i}{2}$$

(2021 / "تطبيقي")

اما $Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

او $Z = \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

الجذران غير مترافقان

يمكن حل السؤال بطريقة التجربة او طريقة اكمال المربع

س: جد مجموعة الحل للمعادلة في $\mathbb{C}$: $x^2 - 6x + 25 = 0$

sol :

الطريقة أولى

$$a = 1 \ , b = -6 \ , c = 25$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \mp \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \mp \sqrt{-64}}{2}$$

(2022 / "تمهيدي" "احيائي")

$$= \frac{6 \mp 8i}{2}$$

$$Z_1 = 3 + 4i \quad , \quad Z_2 = 3 - 4i$$

$$S = [\,3 + 4i\,, 3 - 4i]$$

ملاحظة/
1) يحاسب الطالب على الخطأ الحسابي مرة واحدة ولجميع الاسئلة
2) اذا حل الطالب بطريقة منهجية صحيحة يعطى درجة كاملة

الطريقة ثانية

$$x^2 - 6x + 9 + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 16i^2 = 0$$

$$(x-3)^2 - 16i^2 = 0$$

$$[(x-3) - 4i\,][(x-3) + 4i\,] = 0$$

أما $x - 3 - 4i = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 + 4i$

أو $x - 3 + 4i = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 - 4i$

$$\therefore S = [\,3 + 4i\,, 3 - 4i]$$

س حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $Z^2 + 2Z + 4i = 4i^6$

sol :

الطريقة أولى

(1/ 2023 "أحيائي")

$Z^2 + 2Z + 4i = 4i^6$

$Z^2 + 2Z + 4i = -4$

$Z^2 + 2Z + 4 + 4i = 0$

$a = 1 \ \ , b = 2 \ \ , c = 4 + 4i$

$x = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\quad = \dfrac{-2 \mp \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4 + 4i)}}{2(1)}$

$x = \dfrac{-2 \mp \sqrt{4 - 16 - 16i}}{2}$

$x = \dfrac{-2 \mp \sqrt{-12 - 16i}}{2}$ ……. (1

Let $\sqrt{-12 - 16i} = x + yi$

$-12 - 16i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 12$ ……… (1)

$2xy = -16 \ \Rightarrow \ xy = \frac{-16}{2} \ \Rightarrow y = \frac{-8}{x}$ … (2)

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{-8}{x}\right)^2 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - \frac{64}{x^2} = 0] * x^2$

$x^4 - 64 = -12x^2 \Rightarrow x^4 + 12x^2 - 64 =$

$\underbrace{(x^2 + 16)}_{\text{يهمل}}(x^2 - 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

اما $x = 2 \ \Rightarrow y = -4 \ \ \Rightarrow \ y = 2 - 4i$

او $x = -2 \ \Rightarrow y = +4 \ \ \Rightarrow \ y = -2 + 4i$

بتعويض احد الجذور في رقم (1)

$Z = \frac{-2 \mp (2 - 4i)}{2}$

اما $Z_1 = \frac{-2 + 2 - 4i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i$

او $Z_2 = \frac{-2 - (2 - 4i)}{2} = \frac{-2 - 2 + 4i}{2} = -2 + 2i$

$\therefore S = \{-2i \ , -2 + 2i\}$

ملاحظة/

1) يحاسب الطالب على الخطأ الحسابي مرة واحدة ولجميع الاسئلة

2) اذا حل الطالب بطريقة منهجية صحيحة يعطى درجة كاملة

الطريقة ثانية

$Z^2 + 2Z + 4i = 4i^6$

$Z^2 + 2Z + 4i = -4$

$Z^2 + 2Z + 4 + 4i = 0$

$Z^2 + 2Z + 2i(2 - 2i) = 0$

$[Z + 2i\,][Z + (2 - 2i)] = 0$

أما $Z = \ -2i$

أو $Z = -(2 - 2i) \quad \rightarrow \quad Z = -2 + 2i$

$\therefore S = [\,-2i\, , -2 + 2i]$

6 الاسئلة الوزارية حول "كون المعادلة التربيعية اذا علم جذراها"

س/ اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة a وما هو الجذر الاخر

(1 /2011)

(1/2024 "محاولات أحيائي")

sol :

$(3+i)^2-a(3+i)+(5+5i)=0$

$\rightarrow(9+6i+i^2)+(5+5i)=a.(3+i)$

$(8+6i)+(5+5i)=a.(3+i)$

$\rightarrow(13+11i)=a.(3+i)$

$a=\dfrac{13+11i}{3+i}$

$\rightarrow a=\dfrac{13+11i}{3+i}\cdot\dfrac{3-i}{3-i}$

$\rightarrow a=\dfrac{(39+11)+(-13+33)i}{10}=5+2i$

اذا كان $h=3+i$ هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الاخر هو k

$x^2-(5+2i)x+(5+5i)=0$

$x^2-(h+k)x+hk=0$

$\rightarrow h+k=5+2i$

$(3+i)+k=5+2i$

$\rightarrow k=(5+2i)-(3+i)$

$\rightarrow k=(5+2i)+(-3-i)\rightarrow k=2+i$

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو $(3-i)$؟

(1/2017 "خارج القطر")

sol :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+i$

مجموع الجذرين $(3-i)+(3+i)=6$

حاصل ضرب الجذرين $(3-i).(3+i)=9+1=10$

∴ المعادلة هي : $x^2-6x+10=0$

س/ اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2-x-bx+c-6=0$ معاملاتها حقيقية, جد قيمتي $b,c\in R$

(2 /2015)

sol :

$2x^2-x-bx+c-6=0$

$2x^2-(1+b)x+c-6=0\,]\div 2$

$x^2-\dfrac{1+b}{2}x+\dfrac{c-6}{2}=0$

∵معاملات المعادلة حقيقية ⟸ الجذران مترافقان ,

فيكون الثاني $(2+4i)$

مجموع الجذرين : $(2-4i)+(2+4i)=4$

$\therefore\frac{1+b}{2}=4\;\rightarrow 1+b=8\;\rightarrow b=7$

حاصل ضرب الجذرين $(2-4i).(2+4i)=4+16=20$

$\therefore\dfrac{c-6}{2}=20$

$\rightarrow c-6=40\;\rightarrow c=46$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2+i),(5-i)$

(3/2017 "أسئلة الموصل")

sol :

$m=(2+i)\,,L=(5-i)$

$m+L=(2+i)+(5-i)=7$

$m.L=(2+i).(5-i)$

$=10-2i+5i+1=11+3i$

∴ المعادلة هي : $x^2-7x+11+3i=0$

س كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية

اذا كان احد جذريها $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$؟

sol :

(3 / 2018)

Let $L=\left(\sqrt{3}-i\right)^2$

$=3-2\sqrt{3}i-1$

$=2-2\sqrt{3}i$

∵المعاملات اعداد حقيقية ⟸ الجذران مترافقان

$\therefore m=2+2\sqrt{3}i$

$L+m=2-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i=4$

$L.m=\left(2-2\sqrt{3}i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)$

$=4+4.3=16$

∴ المعادلة هي : $x^2-4x+16=0$

س اذا كان $(1+2i)$ هو احد جذري المعادلة

$x^2-(3-i)x+a=0$

فما قيمة الجذر الثاني وما قيمة a ؟

sol :

$x^2-(3-i)x+a=0$

(2/2017"خارج القطر")

$(3-i)=$ مجموع الجذرين

a= حاصل ضرب الجذرين

Let L = الجذر الثاني , $m=1+2i$

$m+L=3-i$

$\rightarrow (1+2i)+L=3-i$

$\rightarrow L=3-i-1-2i$

$\therefore L=2-3i$

$\therefore a=(1+2i).(2-3i)$

$=2-3i+4i-6i^2=8+i$

ملاحظة: يمكن للطالب ان يعوض الجذر الاول في المعادلة الاصلية ويجد قيمة a وبعدها يمكنه ان يجد قيمة الجذر الثاني وفي هذه الحالة يكون الجزء الاول يعطى عليه 6 درجات والجزء الثاني يعطى عليه 4 درجات.

س اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو $(1-3i)$, جد قيمة b , c الحقيقيتين

sol :

$: x^2+x-bx+c+8=0$

$x^2-(1-b)x+c+8=0$

∵معاملات المعادلة حقيقية ⟸ الجذران مترافقان ,

فيكون الثاني$(1+3i)$

مجموع الجذرين: $(1-3i)+(1+3i)=2$

(2/2018"خارج القطر")

$\therefore 1-b=-2$

$\rightarrow b=3$

حاصل ضرب الجذرين: $(1-3i).(1+3i)$

$=1+9=10$

$\therefore c+8=10$

$\rightarrow c=10-8=2$

س جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية

واحد جذريها هو العدد $(3-4i)$

sol :

بما ان المعاملات حقيقية

الجذران مترافقان

(1 / 2020)

الجذر الاول $M=3-4i$

الجذر الثاني $L=3+4i$

مجموع الجذرين $=M+L=(3-4i)+(3+4i)=6$

حاصل ضرب الجذرين $=(3-4i)(3+4i)$

$=3^2+4^2=9+16=25$

$x^2-($ مجموع الجذرين $)x+$ حاصل ضربهم $=0$

$x^2-6x+25=0$

س إذا علمت ان $(2+i)$, هو احد جذري المعادلة $x^2 - hx + 5 - 5i = 0$, جد قيمة h حيث $h \in \mathbb{C}$, وما الجذر الاخر؟

sol :

الطريقة الاولى

$x^2 - hx + 5 - 5i = 0$

بتعويض الجذر الاول بالمعادلة ←

$(2+i)^2 - h(2+i) + 5 - 5i = 0$

$4 + 4i - 1 - h(2+i) + 5 - 5i = 0$

$8 - i = h(2+i)$

$h = \frac{8-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$

(2019 /"تمهيدي")

$h = \frac{16 - 8i - 2i - 1}{4+1}$

$h = \frac{15 - 10i}{5}$

$h = 3 - 2i =$ مجموع الجذرين

$L =$ ليكن الجذر الاخر

$L + 2 + i = 3 - 2i$

$L = 3 - 2i - 2 - i$

$L = 1 - 3i$

الطريقة الثانية

ليكن الجذر الثاني =m

والجذر الاول =L

$m * L = \frac{\text{الحد المطلق}}{x^2 \text{معامل}}$

$m * L = \frac{5-5i}{1}$

$(2+i) * L = 5 - 5i$

$\rightarrow L = \frac{5-5i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$

$L = \frac{10 - 5i - 10i - 5}{4+1}$

$= \frac{5 - 15i}{5} = \frac{5(1-3i)}{5}$

$\therefore L = 1 - 3i$

$m + L = (2+i) + (1 - 3i)$

$\frac{h}{1} = 3 - 2i \rightarrow h = 3 - 2i$

س اذا كان $(3-4i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2 - nx + 10 - 5i = 0$ فما الجذر الثاني ؟ وماقيمة (n) ؟

sol :

الطريقة الأولى:-

Let $M = 3 - 4i \quad , \quad L = ?$

$x^2 - nx + (10 - 5i) = 0$

$M.L = 10 - 5i$

(2 / 2019)

$(3-4i).L = (10 - 5i)$

$L = \frac{10-5i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$L = \frac{30 + 40i - 15i + 20}{9+16} = \frac{50 + 25i}{25}$

$\therefore L = (2+i)$

$n = M + L$

$= 3 - 4i + 2 + i$

$n = 5 - 3i$

الطريقة ثانية :-

نعوض $(3-4i)$ في المعادلة

$(3-4i)^2 - n(3-4i) + (10-5i) = 0$

$9 - 24i + 16i^2 - n(3-4i) + 10 - 5i = 0$

$3 - 29i = n(3-4i)$

$n = \frac{3-29i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$= \frac{9 - 12i - 87i + 116}{9+16} = \frac{125 - 75i}{25}$

$\therefore n = 5 - 3i$

$L + m = n \Rightarrow 3 - 4i + M = 5 - 3i$

$\therefore m = 5 - 3i - 3 + 4i \Rightarrow M = 2 + i$

س/ إذا كان $(3+i)$ أحد جذري المعادلة $x^2-ax+5+5i=0$ ، فما الجذر الثاني؟ وما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟

sol :

الطريقة الاولى:

أولاً نفرض الجذر الاخر = L

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{\text{الحد المطلق}}{x^2 \text{ معامل}}$

$$(3+i).L=\frac{5+5i}{1}$$

$$L=\frac{5+5i}{3+i}.\frac{3-i}{3-i} \quad \Rightarrow L=\frac{15-5i+15i+5}{10}$$

$$L=\frac{20+10i}{10} \quad \Rightarrow L=\frac{20}{10}+\frac{10i}{10}$$

$$\therefore L=2+i$$

$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-x \text{ معامل}}{x^2 \text{ معامل}}$

(2/ 2020)

$$(3+i)(+(2+i)=\frac{-(-a)}{1}$$

$$5+2i=a$$

الطريقة الثانية: أولاً:

$$(3+i)^2-a\,(3+i)+5+5i=0$$

$$9+6i-1-a(3+i)+5+5i=0$$

$$13+11i=a\,(3+i)$$

$$\therefore a=\frac{13+11i}{3+i}.\frac{3-i}{3-i}$$

$$a=\frac{39-13i+33i+11}{10} \Rightarrow a=\frac{50+20i}{10}$$

$$a=5+2i$$

نفرض الجذر الثاني = L

$\because \text{مجموع الجذرين} = \frac{-x \text{ معامل}}{x^2 \text{ معامل}}$

$$L+(3+i)=\frac{-(-a)}{1}$$

$$L+(3+i)=\frac{-(-a)}{1}$$

$$L+(3+i)=\frac{5+2i}{1} \Rightarrow L=5+2i-3-i$$

$$\therefore L=2+i$$

س/ جد المعادلة التربيعية التي جذراها $(2+2i)$ ، $(-2-2i)$

sol :

$\text{مجموع الجذرين} = (-2-2i)+(2+2i)=0$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (-2-2i).(2+2i)$

$=-4-4i-4i+4$

$=-8i$

(2/ 2020)

المعادلة $\therefore$

$x^2-(\text{مجموع الجذرين})\,x+\text{حاصل ضرب الجذرين}=0$

$x^2-8i=0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1+2i),(1-i)$

sol :

$L=(1+2i)\ ,\ M=(1-i)$

$L+M=(1+2i)+(1-i)$

$=2+i$

$L.M=(1+2i).(1-i)$

(3/ 2020)

$=1-i+2i+2$

$=3+i$

$x^2-(\text{مجموع الجذرين})\,x+\text{حاصل ضربهما}=0$

$x^2-(2+i)x+(3+i)=0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $(3-4i)$

sol :

بما ان المعاملات حقيقية $(3-4i)$

(2021 /"تمهيدي"تطبيقي")

$\therefore$ الجران مترافقان

$\therefore$ الجذر الثاني هو $3+4i$

$\text{مجموع الجذرين} = 3-4i+3+4i=6$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (3-4i)(3+4i)$

$=3^2+4^2=9+16=25$

$\therefore$ المعادلة هي : $x^2-6x+25=0$

ملاحظة :- يمكن حل حاصل ضرب الجذرين بالتوزيع

س: اذا كان أحد جذري المعادلة $x^2+(1-a)x+b+8=0$ ، هو $(1-3i)$ ، جد قيمة a , b الحقيقتين.

sol :

الجذران مترافقان لان المعاملات حقيقية

الجذر الاول $1-3i$ الجذر الثاني $1+3i$

$$x^2+(1-a)x+b+8=0$$

$$x^2-(-1+a)x+b+8=0$$

مجموع الجذرين $=(1-3i)+(1+3i)=2$

ضرب الجذرين $=(1-3i)(1+3i)=10$

مجموع الجذرين $=-1+a$

$$2=-1+a$$

$$\therefore a=3$$

("تطبيقي" 2/ 2020)

ضرب الجذرين $=b+8$

$$10=b+8$$

$$\therefore\ b=2$$

س: اذا كان احد جذري المعادلة $x^2-3ix-6x+c=0$ هو ضعف الجذر الاخر ، فجد c

sol :

نفرض الجذر الاول $=L$

اذن الجذر الثاني $=M=2L$

$$x^2-(3i+6)+c=0$$

$$x^2-(L+M)x+L.M=0$$

$$L+M=L+2L=3L$$

$$[3L=3i+6]\div 3$$

("احيائي" 1/ 2021)

الجذر الاول $L=i+2\Rightarrow L=2+i$

الجذر الثاني $M=2(2+i)=4+2i$

$$c=L.M$$

$$c=(2+i).(4+2i)$$

$$c=8+4i+4i-2$$

$$c=6+8i$$

س: كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذريها مقاسه (2) وسعته $\frac{5\pi}{3}$

sol :

نفرض العدد $L=x+yi$

في الربع الرابع $=\frac{5\pi}{3}$ $(+,-)$

$$\cos\phi=\frac{x}{r}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$$

$$\sin\phi=\frac{y}{r}$$

("تطبيقي" / 2021)

$$\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{y}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{y}{2}\Rightarrow 2y=-2\sqrt{3}\Rightarrow y=-\sqrt{3}$$

$\therefore$ العدد $L=1-\sqrt{3}i$

$\because$ المعاملات حقيقية $\therefore$ الجذران مترافقان

$$L=1-\sqrt{3}i\ ,\ m=1+\sqrt{3}i$$

$$L+m=(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=2$$

$$L.m=(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=1+3=4$$

$\therefore$ المعادلة التربيعية

$x^2-($مجموع الجذرين$)x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0$

$$x^2-2x+4=0$$

الطالب لايحاسب اذا لم يكتب القانون

طريقة حل اخرى لايجاد العدد

$$L=Z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$$

$$Z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=1-\sqrt{3}i$$

س/ اذا كان $(1+2i)$ احد جذري المعادلة $2x^2 - 2x - bx + a - 7 = 0$ ، فما قيمة $a , b \in R$ ؟

sol :

الطريقة الاولى

∵ المعادلة ذات معاملات حقيقية

∴ جذراهما مترافقان وهما

$M = 1 + 2i \quad , \quad L = 1 - 2i$

$M + L = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2$

$M.L = (1 + 2i).(1 - 2i) = 1 + 4 = 5$

$x^2 - (M + L)x + (M.L) = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

(2021 /1 "احيائي")

$[2x^2 - 2x - bx + a = 0] \div 2$

$x^2 - \frac{(2 + b)}{2}x + \frac{a - 7}{2} = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ بالمقارنة مع

$\therefore \frac{2+b}{2} = 2\,].2 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2$

$\frac{a-7}{2} = 5\,].2$

$a - 7 = 10 \Rightarrow a = 10 + 7 \Rightarrow a = 17$

الطريقة الثانية

∵ المعادلة ذات معاملات حقيقية

∴ جذراهما مترافقان وهما

$M = 1 + 2i \quad , \quad L = 1 - 2i$

$2x^2 - (2 + b)x + a - 7 = 0$

$\because L + M = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2}$

$(1 + \cancel{2i}) + (1 - \cancel{2i}) = \frac{-(-(2+b))}{2}$

$2 = \frac{2+b}{2}$

$\therefore 4 = 2 + b \Rightarrow b = 2$

$\because L.M = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^2}$

$(1 + 2i).(1 - 2i) = \frac{a-7}{2}$

$1 + 4 = \frac{a - 7}{2}$

$\Rightarrow 10 = a - 7 \Rightarrow a = 10 + 7 \Rightarrow a = 17$

س/ جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذريها هو $(\frac{3+4i}{1-2i})$

sol :

الطريقة الاولى

$\frac{3 + 4i}{1 - 2i}.\frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{3 + 6i + 4i - 8}{1 + 4}$

$= \frac{-5 + 10i}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{10i}{5} = -1 + 2i$

∵ المعادلة معاملاتها اعداد حقيقية

∴ الجذر الثاني هو مرافق الجذر الأول

∴ الجذران هما $L = -1 + 2i \quad , \quad M = -1 - 2i$

$L + M = (-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -2$

$L - M = (-1 + 2i) - (-1 - 2i) = 1 + 4 = 5$

∴ المعادلة التربيعية هي

$x^2 - (L + M)\,x + L.M = 0$

$x^2 - 2\,x + 5 = 0$

الطريقة الثانية

(2022/ "تمهيدي "احيائي")

∵ المعاملات حقيقية

∴ الجذران مترافقان

$L = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \quad , \quad M = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

$L + M = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} + \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

$= \frac{(3 + 4i)(1 + 2i) + (3 - 4i)(1 - 2i)}{1 + 4}$

$= \frac{3 + 6i + 4i - 8 + 3 - 6i - 4i - 8}{5}$

$= \frac{6 - 16}{5} = \frac{-10}{5} = -2$

$L.M = \frac{3 + 4i}{1 - 2i}.\frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{9 + 16}{1 + 4} = \frac{25}{5} = 5$

∴ المعادلة التربيعية هي

$x^2 - (L + M)\,x + L.M = 0$

$x^2 - 2\,x + 5 = 0$

س: أذا كان كل من Z_1 , Z_2 عددا مركبا، وكان $Z_1 + Z_2 = 4$, $Z_1 . Z_2 = 29$ جد Z_1 , Z_2 ، ثم كون المعادلة التربيعية التي جذرها Z_1 , Z_2 .

sol :

الطريقة الأولى:

∴ ان حاصل ضربهما يساوي عدد حقيقي ومجموعها يساوي عدد حقيقي كذلك

∴ الجذران مترافقان ...... نفرض

$$Z_1 = a + bi$$
$$Z_2 = a - bi$$
$$Z_1 + Z_2 = 2a = 4 \qquad , a = 2$$
$$Z_1 , Z_2 = a^2 + b^2 = 29$$
$$4 + b^2 = 29$$
$$b^2 = 25 \quad \rightarrow \quad b = \pm 5$$

(2022 /2 "احيائي")

$$z_1 = 2 + 5i$$
$$z_2 = 2 - 5i$$
$$x^2 + 4x + 29 = 0$$ المعادلة التربيعية

الطريقة الثانية:

$$Z_1 , Z_2 = 4$$
$$Z_2 = 4 - z_1 \; \dots\dots\dots (1)$$
$$Z_1 , Z_2 = 29 \dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (1) في (2)

$$Z_1 (4 - z_1) = 29$$
$$4z_1 - z_1^2 = 29$$
$$z_1^2 - 4z_1 + 29 = 0$$
$$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = 29$$
$$z_1 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(29)}}{2(1)}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} == \frac{4 \pm 10i}{2}$$
$$= 2 \pm 5i$$
$$z_1 = 2 + 5i \quad or \quad z_1 = 2 - 5i$$

نعوض في معادلة (1)

$$Z_2 = 4 - (2 + 5i) \qquad or \qquad Z_2 = 4 - (2 - 5$$
$$= 4 - 2 - 5i \qquad\qquad = 4 - 2 + 5i$$
$$= 2 - 5i \qquad\qquad = 2 + 5i$$
$$x^2 + 4x + 29 = 0$$ المعادلة التربيعية

الطريقة الثالثة:

$$Z_1 + Z_2 = 4 \;\rightarrow z_1 = 4 - z_2$$
$$z_1 . z_2 = 29 \quad \rightarrow (4 - z_2) z_2 = 29$$
$$4z_2 - z_2^2 = 29 \quad \rightarrow \quad z_2^2 - 4z_2 + 29 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow 16 - 4(1)(29) = 16 - 116$$
$$= -100 < 0$$

$\therefore z_1 = \overline{z_2}$ ∴ الجذران تحليلان مترفقان

$$let \;\; z_1 = a + bi \qquad , z_2 = a - bi$$
$$a + bi + a - bi = 4 \;\rightarrow 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2$$
$$(a + bi)(a - bi) = 29 \;\rightarrow a^2 + b^2 = 29$$
$$4 + b^2 = 29 \;\rightarrow\; b^2 = 25 \;\rightarrow \therefore b = \pm 5$$
$$z_1 = 2 + 5i \quad , \; z_2 = 2 - 5i$$
$$x^2 + 4x + 29 = 0$$ المعادلة التربيعية

س: كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها $(5 - i)$

sol :

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذران مترافقان

⇐ الجذر الاخر $5 + i$

$$L = 5 - i \;\; , \;\; M = 5 + i$$
$$L + M = (5 - i) + (5 + i)$$
$$= 10$$

(2022 /"تمهيدى "تطبيقى")

$$L.M = (5 - i)(5 + i)$$
$$= 25 + 1 = 26$$
$$x^2 - (L + M)x + (L.M) = 0$$
$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

جد المعادلة التربيعية التي جذراها

$(2-2w-2w^2)^2 , (2w+2w^2-1)^2$

Sol :

$h=(2-2w-2w^2)^2$

$=[2-2(w+w^2)]^2$

$=(2+2)^2=16$

$k=(2w+2w^2-1)^2$

$=[2(w+w^2)-1]^2$

$=(-2-1)^2=9$

2/1997

$h+k=25 \ , hk=144$

$\to x^2-(h-k)x+hk=0$

$\to x^2-25x+144=0$

جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(\frac{1+3w}{w^2+3}\right)$, $\left(\frac{1}{w}\right)$

Sol:

$m=\dfrac{1}{w}=\dfrac{w^3}{w}=w^2$

$L=\dfrac{1+3w}{w^2+3}=\dfrac{w^3+3w}{w^2+3}$

$=\dfrac{w(w^2+3)}{(w^2+3)}=w$

3/2016

$m+L=w^2+w=-1$

$m.L=w^2.w=w^3=1$

$x^2-(m+L)x+m.L=0$

$x^2-1x+(1)=0$ المعادلة التربيعية المطلوبة

$\to \ x^2+x+1=0$

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها

$(2i\,w^2-w),(2iw-w^2)$

Sol :

$h=2iw^2-w \, , k=2iw-w^2$

2/1998

$h+k=(2iw^2-w)+(2iw-w^2)$

$=2i(w^2+w)+(-w-w^2)=1$

$h.k=(2iw^2-w).(2iw-w^2)$

$=4i^2w^3-2iw^4-2iw^2+w^3$

$=-4-2i(w+w^2)+1=-3+2i$

$x^2-(h+k)x+hk=0$

1/2015 "أسئلة النازحين"

$\to x^2-(1-2i)x+(-3+2i)=0$

كون المعادلة التربيعية التي جذراها

$\left(2w^2i-\frac{2w}{i}\right),\left(2wi-\frac{2w^2}{i}\right)$

Sol :

$h=\left(2w^2i-\dfrac{2w}{i}\right)=\left(2w^2i-\dfrac{2w}{i}.\dfrac{-i}{-i}\right)$

$=(2w^2i+2wi)$

$=2i(w^2+w)=-2i$

1/1999

$k=\left(2wi-\dfrac{2w^2}{i}\right)$

$=\left(2wi-\dfrac{2w^2}{i}.\dfrac{-i}{-i}\right)$

$=(2wi+2w^2i)=2i(w+w^2)=-2i$

$(h+k)=(-2i)+(-2i)=-4i$

$(h.k)=(-2i).(-2i)=4i^2=-4$

$x^2-(-4i)x+(-4)=0 \ \to x^2+4ix-4=0$

كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1+w),(1+w^2)$

Sol :

$h=(1+w)=-w^2$

2/2007

$k=(1+w^2)=-w$

$(h+k)=(-w)+(-w^2)=1$

$h.k=(-w)(-w^2)=1$

4/2014 "أسئلة النازحين"

$x^2-x+1=0$ المعادلة هي

كون المعادلة التي جذراها $(2-3iw),(2-3iw^2)$

Sol:

$h=(2-3iw) \ ,k=(2-3iw^2)$

1/2001

$h+k=(2-3iw)+(2-3iw^2)$

$=4-3i(w^2+w)=4+3i$

$h.k=(2-3iw).(2-3iw^2)$

$=4-6w^2i-6wi+9i^2w^3$

$=-5-6i(w+w^2)=-5+6i$

$x^2-(h+k)x+hk=0$

$\to x^2-(4+3i)x+(-5+6i)=0$

س: كون المعادلة التي جذراها $(3w^2 - 2i), (3w - 2i)$

Sol : $h = (3w^2 - 2i), \quad k = (3w - 2i)$

$h + k = (3w^2 - 2i) + (3w - 2i)$

$= 3(w^2 + w) + (-4i) = -3 - 4i$

$h.k = (3w^2 - 2i).(3w - 2i)$

$= 9w^3 - 6w^2i - 6wi + 4i^2$ 2/2001

$= 5 - 6i(w + w^2) = 5 + 6i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$\rightarrow x^2 - (-3 - 4i)x + (5 + 6i) = 0$

س: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(5 - \frac{i}{w}\right), \left(5 - \frac{i}{w^2}\right)$

Sol : $h = \left(5 - \frac{i}{w}\right) = \left(5 - \frac{iw^3}{w}\right) = 5 - iw^2$

$k = \left(5 - \frac{i}{w^2}\right) = \left(5 - \frac{iw^3}{w^2}\right) = 5 - iw$

$h + k = (5 - iw^2) + (5 - iw)$

$= 10 - i(w^2 + w) = 10 + i$ 1/2004

$h.k = (5 - iw^2) + (5 - iw)$

$= 25 - 5w^2i - 5wi + i^2w^3$

$= 24 - 5i(w + w^2) = 24 + 5i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$\rightarrow x^2 - (10 + i)x + (24 + 5i) = 0$

س: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(i - \frac{3}{w}\right), \left(i - \frac{3}{w^2}\right)$

Sol :

$h = \left(i - \frac{3}{w}\right) = \left(i - \frac{3w^3}{w}\right) = -3w^2 + i$

$k = \left(i - \frac{3}{w^2}\right) = \left(i - \frac{3w^3}{w^2}\right) = -3w + i$

$h + k = (-3w^2 + i) + (-3w + i)$

$= -3(w^2 + w) + 2i = 3 + 2i$

$h.k = (-3w^2 + i).(-3w + i)$ 1/2005

$= 9w^3 - 3w^2i - 3wi + i^2$

$= 8 - 3i(w + w^2) = 8 + 3i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$\rightarrow x^2 - (3 + 2i)x + (8 + 3i) = 0$

س: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(3 - 2iw), (3 - 2iw^2)$

Sol :

$h = (3 - 2iw) \quad , \quad k = (3 - 2iw^2)$

$h + k = (3 - 2iw) + (3 - 2iw^2)$

$= 6 - 2i(w^2 + w) = 6 + 2i$

$h.k = (3 - 2iw)(3 - 2iw^2)$

$= 9 - 6w^2i - 6wi + 4i^2w^3$ 1/2006

$= 5 - 6i(w + w^2) = 5 + 6i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$\rightarrow x^2 - (6 + 2i)x + (5 + 6i) = 0$

س: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(3 + 2iw), (3 + 2iw^2)$

Sol :

$h = (3 + 2iw), k = (3 + 2iw^2)$

$h + k = (3 + 2iw) + (3 + 2iw^2)$

$= 6 + 2i(w^2 + w) = 6 - 2i$

$h.k = (3 + 2iw).(3 + 2iw^2)$

$= 9 + 6w^2i + 6wi + 4i^2w^3$ 2006/"تمهيدي"

$= 5 + 6i(w + w^2) = 5 - 6i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$\rightarrow x^2 - (6 - 2i)x + (5 - 6i) = 0$

س: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3i}{w^2}, \frac{-3w^2}{i}$

Sol : $h = \frac{3i}{w^2} = \frac{3w^3i}{w^2} = 3wi$,

$k = \frac{-3w^2}{i} = \frac{-3w^2}{i} . \frac{-i}{-i} = 3w^2i$ 2/2011

$(h + k) = (3wi) + (3w^2i)$ 3/2014

$= 3i(w + w^2)$

$= -3i$ 1/2015"أسئلة النازحين"

$h.k = (3wi)(3w^2i)$ 4/2015"أسئلة النازحين"

$= 9w^3i^2 = -9$

$x^2 + 3ix - 9 = 0$ المعادلة هي 1/2024

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1-iw),(1-iw^2)$

Sol :

3/2012

$$h=(1-iw^2),\ k=(1-wi)$$
$$h+k=(1-w^2i)+(1-wi)$$
$$=(1+1)+(-w^2-w)i=2+i$$
$$h.k=(1-w^2i).(1-wi)$$
$$=(1-w^3)+(-w^2-w)i=i$$

المعادلة هي $x^2-(2+i)x+i=0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها

$3w^2+\frac{i}{w}\ ,\ 3w+\frac{i}{w^2}$

Sol :

1/2008

$$h=\left(3w^2+\frac{i}{w}\right)=\left(3w^2+\frac{iw^3}{w}\right)=3w^2+iw^2$$
$$k=\left(3w+\frac{i}{w^2}\right)=\left(3w^2+\frac{iw^3}{w^2}\right)=3w+iw$$
$$h+k=(3w^2+iw^2)+(3w+iw)$$
$$=3(w^2+w)+i(w^2+w)=-3-i$$
$$h.k=(3w^2+iw^2)(3w+iw)$$
$$=9w^3+3w^3i+3w^3i+i^2w^3$$
$$=9+6i-1=8+6i$$
$$x^2-(h+k)x+hk=0$$
$$\to x^2-(-3-i)x+8+6i=0$$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{w}{1+3w},\frac{w^2}{1+3w^2}$

Sol :

1/2008"خارج القطر"

$$h+k=\frac{w}{1+3w}+\frac{w^2}{1+3w^2}$$
$$=\frac{w(1+3w^2)+w^2(1+3w)}{(1+3w)(1+3w^2)}$$
$$=\frac{w+3w^3+w^2+3w^3}{1+3w^2+3w+9w^3}$$
$$=\frac{w+w^2+6}{10+3(w^2+w)}=\frac{-1+6}{10-3}=\frac{5}{7}$$
$$h.k=\frac{w}{1+3w}\cdot\frac{w^2}{1+3w^2}$$
$$=\frac{w^3}{(1+3w)(1+3w^2)}=\frac{1}{1+3w^2+3w+9w^3}=\frac{1}{7}$$
$$x^2-(h+k)x+hk=0$$
$$\to x^2-\left(\frac{5}{7}\right)x+\left(\frac{1}{7}\right)=0$$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{w}{1+2w},\frac{w^2}{1+2w^2}$

Sol :

2/2010

$$h+k=\frac{w}{1+2w}+\frac{w^2}{1+2w^2}$$
$$=\frac{w(1+2w^2)+w^2(1+2w)}{(1+2w)(1+2w^2)}$$
$$=\frac{w+2w^3+w^2+2w^3}{1+2w^2+2w+4w^3}$$
$$=\frac{w+w^2+4}{5+2(w^2+w)}=\frac{-1+4}{5-2}=\frac{3}{3}=1$$
$$h.k=\frac{w}{1+2w}\cdot\frac{w^2}{1+2w^2}$$
$$=\frac{w^3}{1+2w^2+2w+4w^3}$$
$$=\frac{1}{5+2(w^2+w)}=\frac{1}{3}$$
$$x^2-(h+k)x+hk=0$$
$$\to x^2-x+\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

س/ كون المعادلة التي جذراها $\frac{3}{1-w}\ ,\ \frac{3}{1-w^2}$

Sol :

"تمهيدي"/2012

$$h=\frac{3}{1-w^2}\quad,\quad k=\frac{3}{1-w}$$
$$h+k=\left(\frac{3}{1-w^2}\right)+\left(\frac{3}{1-w}\right)$$
$$=\frac{3(1-w)+3(1-w^2)}{(1-w)(1-w^2)}$$
$$=\frac{3-3w+3-3w^2}{1-w^2-w+w^3}$$
$$=\frac{6-3(w+w^2)}{2-w^2-w}=\frac{6+3}{2+1}=3$$
$$h.k=\left(\frac{3}{1-w^2}\right).\left(\frac{3}{1-w}\right)$$
$$=\frac{9}{1-w^2-w+w^3}=\frac{9}{3}=3$$

المعادلة هي $x^2-3x+3=0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{w}{3-w^2}$ ، $\frac{w^2}{3-w}$

Sol :

$$h=\frac{w}{3-w^2}\quad ,k=\frac{w^2}{3-w}$$

"2014/"تمهيدي"

$$h+k=\left(\frac{w}{3-w^2}\right)+\left(\frac{w^2}{3-w}\right)$$

$$=\frac{w(3-w)+w^2(3-w^2)}{(3-w)(3-w^2)}$$

$$=\frac{3w-w^2+3w^2-w^4}{9-3w^2-3w+w^3}$$

$$=\frac{3w-w^2+3w^2-w}{9-3w^2-3w+1}=\frac{2(w+w^2)}{10-3(w^2+w)}$$

$$=\frac{-2}{13}$$

$$h.k=\left(\frac{w}{3-w^2}\right).\left(\frac{w^2}{3-w}\right)$$

$$=\frac{w^3}{(3-w)(3-w^2)}=\frac{1}{9-3w^2-3w+w^3}$$

$$=\frac{1}{9-3w^2-3w+1}=\frac{1}{10-3(w^2+w)}$$

$$=\frac{1}{13}$$

$x^2+\frac{2}{13}x+\frac{1}{13}=0$ المعادلة هي

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(\frac{5}{w}-i\right),\left(\frac{5}{w^2}+i\right)$

Sol :

$$h=\left(\frac{5}{w}-i\right)=\left(\frac{5w^3}{w}-i\right)=(5w^2-i)$$

$$k=\left(\frac{5}{w^2}+i\right)=\left(\frac{5w^3}{w^2}+i\right)=(5w+i)$$

$$h+k=(5w^2-i)+(5w+i)$$

$$=5(w+w^2)=-5$$

"2/2015"خارج القطر"

$$h.k=(5w^2-i)(5w+i)$$

$$=25w^3+5w^2i-5wi-i^2$$

$$=26+5i(w^2-w)=26+5i(\pm\sqrt{3}i)$$

$$=26\pm5\sqrt{3}\,i^2=26\mp5\sqrt{3}$$

$x^2-(h+k)x+h.k=0$ المعادلة التربيعية

$x^2+5x+26+5\sqrt{3}=0$ المعادلة التربيعية المطلوبة

OR $x^2+5x+26-5\sqrt{3}=0$

س/ جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{2+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

Sol : $\text{الجذر الاول}=h=\frac{2+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

$$=\frac{2+i(w+w^2)}{1-i(w-w^2)}=\frac{2+i(-1)}{1-i(-1)}=\frac{2-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{2-2i-i-1}{(1)^2+(1)^2}=\frac{1-3i}{2}$$

3/2018

$h=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ الجذر الأول

بما ان المعاملات حقيقية اذا الجذران مترافقان

$k=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ الجذر الثاني

$$h+k=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)=1$$

$$h.k=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right).\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ x^2-x+\frac{5}{2}=0$$

س/ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها هو $\frac{7+iw+iw^2}{2+iw^4+iw^5}$

Sol :

$$h=\frac{7+iw+iw^2}{2+iw^4+iw^5}=\frac{7+i(w+w^2)}{2+i(w+w^2)}$$

$$=\frac{7-i}{2-i}=\frac{7-i}{2-i}.\frac{2+i}{2+i}=\frac{14+7i-2i-i^2}{4+1}$$

$$=\frac{15+5i}{5}=3+i$$

بما ان المعادلة التربيعية ذات معاملات حقيقية فان الجذران مترافقان

$$h=3+i\quad ,\ k=3-i$$

$$h+k=(3+i)+(3-i)$$

$$=6$$

"1/2016"خارج القطر"

$$h.k=(3+i).(3-i)$$

$$=9+1=10$$

$$x^2-(h+k)x+hk=0$$

$\rightarrow x^2-6x+10=0$ المعادلة التربيعية المطلوبة

س/ جد المعادلة التربيعية التي جذراها

$\left(3wi-\frac{2w^2}{i}\right),\left(2wi-\frac{3w^2}{i}\right)$

Sol :

$$h=\left(2wi-\frac{3w^2}{i}\right)=\left(2wi-\frac{3w^2i^4}{i}\right)$$
$$=(2wi+3w^2i)$$
$$k=\left(3wi-\frac{2w^2}{i}\right)=\left(3wi-\frac{2w^2i^4}{i}\right)$$
$$=(3wi+2w^2i)$$
$$(h+k)=(2wi+3w^2i)+(3wi+2w^2i)$$
$$=5wi+5w^2i$$
$$=5i(w+w^2)$$
$$=5i(-1)=-5i$$
$$(h.k)=(2wi+3w^2i)+(3wi+2w^2i)$$
$$=6w^2i^2+4w^3i^2+9w^3i^2+6w^4i^2$$
$$=6w^2-4-9-6w$$
$$=-6w^2-6w-13$$

2019/"تمهيدي"

$$=-6(w^2+w)-13$$
$$=6-13=-7$$
$$x^2-(h+k)x+(h.k)=0$$
$$x^2-(-5i)x+(-7)=0$$
$$\rightarrow x^2+5ix-7=0$$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(i-\frac{5}{w}\right),\left(i-\frac{5}{w^2}\right)$

sol :

$$\left(i-\frac{5}{w}\right),\left(i-\frac{5}{w^2}\right)$$

3/2020"تطبيقي"

$$L=i-\frac{5}{w}=i-\frac{5w^3}{w^2}$$
$$=i-5w^2$$
$$M=i-\frac{5}{w^2}=i-\frac{5w^3}{w^2}=i-5w$$
$$\therefore L+M=i-5w^2+i-5w$$
$$=2i-5(w^2+w)=2i+5=5+2i$$
$$L.M=(i-5w^2)(i-5w)$$
$$=i^2-5wi-5w^2i+25w^3$$
$$=-1-5i(w+w^3)+25$$
$$=24+5i$$

المعادلة $x^2-(5+2i)x+(24+5i)=0$

س/ إذا كان $M=(1-i)^6$ ، $L=8i^{12n+3}$ حيث n عدد طبيعي ، اثبت ان L , M مترافقان ، ثم كون المعادلة التربيعية التي جذراها L , M

Sol :

$$M=(1-i)^6=((1-i)^2)^3=(1-2i+i^2)^3$$
$$=(1-2i-1)^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$$
$$L=8i^{12n+3}=8i^{12n}.i^3=8(i^4)^{3n}.(-i)$$
$$=8(1)^{3n}.(-i)=-8i$$
$$\therefore \overline{M}=-8i=L$$

∴ الجذران مترافقان

$$M+L=+8i-8i=0$$
$$M.L=8i.(-8i)=64$$

3/2023"تكميلي"

$$x^2-(M+L)x+M.L=0$$
$$x^2+64=0$$

س/ اذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 + 2i$ وضح على شكل ارجاند $z_1 + z_2$

(3/2013)

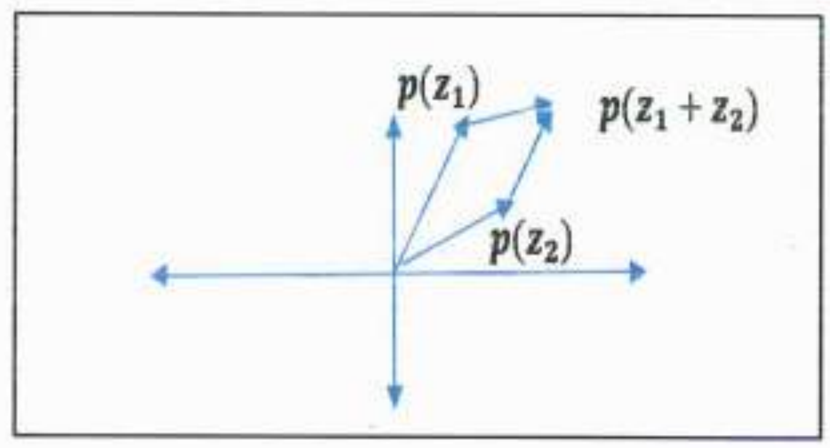
sol

$z_1 = 3 + 4i \rightarrow P(z_1) = (3\,,4)$

$z_2 = 5 + 2i \rightarrow P(z_2) = (5\,,2)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$

$= 8 + 6i \rightarrow p(z_1 + z_2) = (8\,,6)$



س/ اذا كان $x = 4 - 2i$, $y = 1 + 2i$ وضح بشكل ارجاند

1) $x + y$ 2) $x - y$

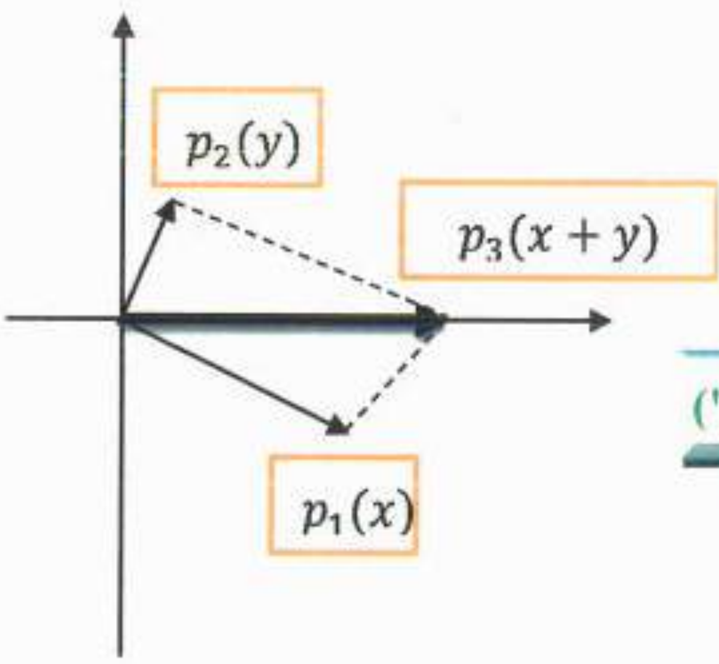
sol

1) $x = 4 - 2i \rightarrow p_1(x) = (4\,,-2)$

$y = 1 + 2i \rightarrow p_2(x) = (1\,,2)$

$x + y = (4 - 2i) + (1 + 2i) = 5 + 0i$

$p_3(5, 0)$



(1/2020"تطبيقي")

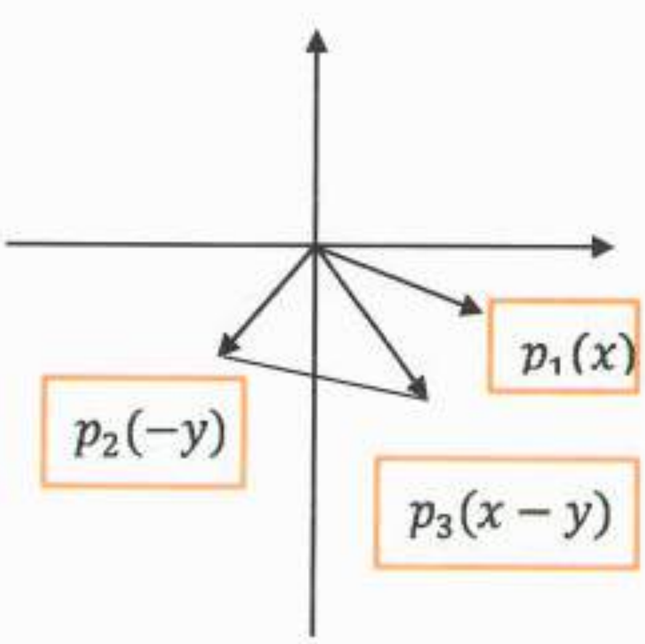
2) $x = 4 - 2i \rightarrow p_1(x) = (4\,,-2)$

$y = 1 + 2i \rightarrow -y = -1 - 2i$

$p_2(-y) = (-1\,,-2)$

$x - y = x + (-y) = 4 - 2i + (-1 - 2i)$

$p_3(x - y) = 3 - 4i$



س/ ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الاساسية.

(1/2001)

sol :

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{7-14\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}\,i+6}{1+12}$$

$$=\frac{13-13\sqrt{3}\,i}{13}=1-\sqrt{3}\,i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}$$

$$=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{5\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الرابع

س/ اذا كان $z=(-\sqrt{3},1)$ عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

(2/2002)

sol :

$$Z=-\sqrt{3}+i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{5\pi}{6}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

س/ اذا كان z عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له .

(2/2003)

sol :

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$$=3\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

س/ اذا كان Z عددا مركبا مقياسه 4 وسعته $\frac{5\pi}{6}$ جد كلا من الشكل الديكارتي و الجبري له .

(1/2006)

sol :

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$$=4\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=-2\sqrt{3}+2i=(-2\sqrt{3},2)$$

س/ اذا كان $z=(1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

(2/2006)

sol :

$$Z=(1,\sqrt{3})$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الاول

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

sol :

$$\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2i^2}{2}$$

(2/2007)

$$=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{4}$ لان السعه تقع بالربع الاول

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$$z=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^2=1+2\sqrt{3}\,i+3i^2$$

$$=-2+2\sqrt{3}\,i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}$$

$$=\sqrt{16}=4$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

(1/2008)

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

س/ اذا كان $z=(-1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

(1/2008"خارج القطر")

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

sol : $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4}=1+\sqrt{3}\,i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

(2/2008)

$\theta=\frac{\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الاول

س/ عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3}-2i$

sol :

(1/2012)

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1/2013"خارج القطر")

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

(1/2014"نازحين")

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{6}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z)=\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

(3/2023"تطبيقي")

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z=4\left(cos\frac{11\pi}{6}+i\,sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

س/ اذا كان $z=-2+2i$ عبر عن z بالصيغة القطبية.

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}$$

$$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(1/2013)

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعه θ تقع بالربع الثاني

$$arg(z)=\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$ الصورة القطبية

س جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5-5i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2+(5)^2}$$
$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3/2014)

$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$
$$\rightarrow z = 5\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$$ الصورة القطبية

س عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2-2\sqrt{3}i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(1/2015)

$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$
$$\rightarrow z = 4\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

س اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3-3\sqrt{3}\,i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$
$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

(3/2015)

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$
$$\rightarrow z = 6\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

س اكتب العدد $z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$ بالصيغة القطبية

sol :

$$M = \left(1+\sqrt{3}\,i\right) = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{2}\ ,\ sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الاول

$$arg(M) = \frac{\pi}{3}$$

(1/2016"خارج القطر")

$$M = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$Z = M^2 = 2^2(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})^2$$
$$Z = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

طريقة ثانية للحل :

$$z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$$
$$Z = 1 + 2\sqrt{3}\,i - 3$$
$$Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$
$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الثاني

$$arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$
$$\rightarrow z = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$$ الصورة القطبية

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $8i$

sol:

$\sqrt{8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 8 \to y = \frac{8}{2x} = \frac{4}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

(1/2011"خارج القطر")

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\to \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right].x^2$

$\to x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

$\to y = \left(\frac{4}{\pm 2}\right) \to y = \pm 2$

ans: $\sqrt{8i} = \{\pm(2 + 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر $(8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\to z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0\ ,1$

If $k = 0 \to z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 + 2i$

If $k = 1 \to z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 - 2i$

س/ احسب ما يأتي: $[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi]^4$

sol:

("2012/"تمهيدي)

$\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1+i)^{11}$

sol:

$z = 1 + i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,\sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = \theta$

$= \frac{\pi}{4}$ السعه تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \to z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\to z^{11} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{11}$

$z^{11} = \left[(\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}\right]$

(2/2011)

$= 32\sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$

$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

("2019/"تمهيدي" تطبيقي)

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

("2020/"تمهيدي" احيائي)

$= 32(-1 + i)$

$= -32 + 32i$

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1-i)^7$ (أو)

باستخدام مبرهنة ديموافر (او التعميم) احسب ما يأتي :

$\left(1 - \sqrt{-1}\right)^7$

sol:

$z = 1 - i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,\sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(1/2012)

$\to z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

("2013/"تمهيدي)

$\to z^7 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})]^7$

("1/2020"تطبيقي)

$= (\sqrt{2})^7\,(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4})$

("1/2022"احيائي)

$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8 + 8i$

س جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-8i$

sol :

$\sqrt{-8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = -8$

$\rightarrow y = \dfrac{-8}{2x} = \dfrac{-4}{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(2013/"تمهيدي")

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\dfrac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \left[x^2 - \dfrac{16}{x^2} = 0\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\dfrac{-4}{\pm 2}\right)$

$\rightarrow y = \pm 2$

$ans: \sqrt{8i} = \{\pm(2 - 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر$(-8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = -8i = 8(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0\ ,1$

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 + 2i$

If $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 - 2i$

س جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة

باستخدام مبرهنة ديموافر: $x^3 - 8i = 0$

sol :

$x^3 = 8i = 8(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{8}\,(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})$

$k = 0\ ,1\ ,2$

(4/2015"أسئلة النازحين")

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

If $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

If $k = 2$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{9\pi}{6} + i\sin\dfrac{9\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$= 2\,(0 - i) = -2i$

جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

sol : $z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعه تقع الربع الاول

$$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=(z^2)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$$

$k=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,4$

If $k=0$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right)$$

(1/2014)

$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})$$

If $k=1$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15})$$

If $k=2$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15})$$

If $k=3$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15})$$

If $k=4$

$$\rightarrow\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right)$$
$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15})$$
$$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$$

باستخدام مبرهنة ديموافر جد : $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

sol :

(2023/"تمهيدي""احيائي")

$z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعه تقع الربع الاول

(1/2012"خارج القطر")

$$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

(2/2014)

$$\rightarrow\ z^{-9}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9}$$
$$=(2)^{-9}(\cos\frac{9\pi}{6}-i\sin\frac{9\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$$

باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب : $-1+\sqrt{3}\,i$

sol :

$z=-1+\sqrt{3}i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\quad ,\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

θ تقع في ربع الثاني زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

(1/2014"خارج القطر")

$$z=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$

(3/2017)

$$z^{\frac{1}{2}}=[2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})]^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2})$$

$k=0\ ,1$

If $k=0\rightarrow\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

If $k=1\rightarrow\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

س: بسط ما يأتي: $\frac{(cos5\theta+isin5\theta)^2}{(cos3\theta+isin3\theta)^3}$

sol :

(2/2013)

$$\frac{(cos5\theta+isin5\theta)^2}{(cos3\theta+isin3\theta)^3}$$

$$=\frac{[(cos\theta+isin\theta)^5\,]^2}{[(cos\theta+isin\theta)^3\,]^3}$$

$$=\frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^9}=cos\theta+isin\theta$$

س: ضع في ابسط صورة المقدار $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos5\theta+isin5\theta)^2}$

sol :

(2014/"تمهيدي")

$$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos5\theta+isin5\theta)^2}$$

$$=\frac{[(cos\theta+isin\theta)^2\,]^5}{[(cos\theta+isin\theta)^5\,]^2}=\frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^{10}}=1$$

س: جد بابسط صورة

a) $\left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

b) $(cos\theta+i\,sin\theta)^8.(cos\theta-i\,sin\theta)^4$

sol :

(1/2015"خارج القطر")

$$a)\ \left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$

$$=\left(cos\frac{21\pi}{12}-i\,sin\frac{21\pi}{12}\right)$$

$$=\left(cos\frac{7\pi}{4}-i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$b)(cos\theta+i\,sin\theta)^8.(cos\theta-i\,sin\theta)^4$

$=(cos\theta+i\,sin\theta)^8.(cos\theta+i\,sin\theta)^{-4}$

$=(cos\theta+i\,sin\theta)^4=cos4\theta+i\,sin4\theta$

او $(cos\theta+i\,sin\theta)^8.(cos\theta-i\,sin\theta)^4$

$=(cos\theta+i\,sin\theta)^4.(cos\theta+i\,sin\theta)^4.(cos\theta-i\,sin\theta)^4$

$=(cos\theta+i\,sin\theta)^4[\,(cos\theta+i\,sin\theta)^4(cos\theta-i\,sin\theta)]^4$

$=(cos4\theta+i\,sin4\theta)(cos^2\theta+isin^2\theta)^4$

$=cos4\theta+i\,sin4\theta$

س: جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol :

(1/2015)

(2017/"تمهيدي")

$$z=125i=125(cos\tfrac{\pi}{2}+i\,sin\tfrac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow z^{\frac{1}{3}}=[125\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)]^{\frac{1}{3}}$$

$$\because r=125\ ,\qquad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow\ z^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}-2k\pi}{3}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}-2k\pi}{3})$$

$k=0\ ,1\ ,\ 2$

(2/2019"تطبيقي")

If $k=0\rightarrow\ z^{\frac{1}{3}}=5\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

If $k=1\rightarrow\ z^{\frac{1}{3}}=5\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)$

$$=5\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

If $k=2\rightarrow\ z^{\frac{1}{3}}=5\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{6}\right)$

$$=5\left(cos\frac{9\pi}{6}+i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$=5\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=5\,(0-i)=-5i$$

س: حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3-125i=0$

sol :

(1/2017"خارج القطر")

$$x^3-125i=0$$

$$x^3=125i$$

$$\rightarrow x^3=125(cos\tfrac{\pi}{2}+i\,sin\tfrac{\pi}{2})$$

تكملة الحل مثل ما موجود في الجواب السابق

س: هل ان: $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos4\theta+isin4\theta)^2}-(cos\theta+isin\theta)^2\ =0$

اثبت ذلك

sol :

(2/2016"خارج القطر")

$$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos4\theta+isin4\theta)^2}$$

$$=(cos\theta+isin\theta)^2$$

$$=\frac{[(cos\theta+isin\theta)^2]^5}{[(cos\theta+isin\theta)^4]^2}-(cos\theta+isin\theta)^2$$

$$=\frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^8}-(cos\theta+isin\theta)^2$$

$$=(cos\theta+isin\theta)^2-(cos\theta+isin\theta)^2=0$$

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

sol :

$$z = 1 + i$$

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$arg(z) = \theta$$

$= \frac{\pi}{4}$ السعه تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع الربع الاول

$$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z^2 = [(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2] = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0\ ,1\ ,2$$

If $k = 0 \rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

الطريقة الثانية

$$z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

(2/2015"خارج القطر")

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0\ ,1\ ,2$$

If $k = 0 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر, بسط ما يأتي : $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^2}$

sol :

الطريقة الاولى $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^2}$

(2/2017)

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^6}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos4\theta + i\sin4\theta$$

الطريقة الثانية

$$\frac{(\cos2\theta + i\sin2\theta)^3}{(\cos3\theta + i\sin3\theta)^2} \cdot (\cos2\theta + i\sin2\theta)^2$$

$$= \frac{\cancel{(\cos6\theta + i\sin6\theta)}}{\cancel{(\cos6\theta + i\sin6\theta)}} \cdot (\cos2\theta + i\sin2\theta)^2$$

$$= \cos4\theta + i\sin4\theta$$

س/ احسب: $[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}]^{-4}$

sol :

$$\left[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^{-4}$$

(2/2017)

$$= \left[\cos\frac{12\pi}{8} - i\sin\frac{12\pi}{8}\right]$$

(2/2018)

$$= \left[\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 0 + i = i$$

س/ احسب: $[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi]^{-3}$

sol :

$$\left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$$

$$= \left[\cos\frac{21\pi}{12} - i\sin\frac{21\pi}{12}\right] = \left[\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

$= \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$ لان $\frac{7\pi}{4} \in$ الربع الرابع

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

(2/2017"خارج القطر")

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر: $(\sqrt{3}+i)^{\frac{-3}{2}}$

sol:

$z=\sqrt{3}+i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ السعه تقع الربع الاول

(1/2017)

(1/2024)

(1/2024"محاولات أحيائي")

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{\frac{-3}{2}} = (z^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$= (2^{-3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$= (\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{8}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$

$\therefore k = 0\ ,1$

If $k=0 \to \ z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

If $k=1 \to \ z^{\frac{-3}{2}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2})$

$= (\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4})$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

ملاحظة/ بأمكان الطالب أيجاد اولاً z^{-1} بتغير اشارة الوسط فقط وثم z^3 ومن ثم $z^{\frac{1}{2}}$ وهكذا

س/ ضع بابسط صوره : $\frac{[\cos5\theta+i\sin5\theta]^2}{[\cos3\theta+i\sin3\theta]^2}[\cos\theta - i\sin\theta]^4$

sol:

$[\cos\theta - i\sin\theta]^{-4}\ \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{6}}$

(2/2018)

$= [\cos\theta + i\sin\theta]^{-4}.[\cos\theta + i\sin\theta]^4$

$= [\cos\theta + i\sin\theta]^0 = 1$

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر او التعميم: $(1+i)^{-5}$

sol:

$z = 1+i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2018/"تمهيدي")

$\sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\to z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\to z^{-5} = \left[(\sqrt{2})^{-5}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-5}\right]$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ (\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4})$

$\therefore \frac{5\pi}{4}$ تقع في الربع الثالث

$z^{-5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{8}i$

س/ اثبت ان: $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^3}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)}.(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$

sol:

$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^3}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)}.(\cos\theta - i\sin\theta)$

(3/2018)

$= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^6}{(\cos\theta+i\sin\theta)^5}.(\cos\theta - i\sin\theta)$

$= (\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta - i\sin\theta)$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

س/ اختصر ما يأتي لابسط صورة : $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

sol:

$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

(2014/"تمهيدي"تطبيقي")

$= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}$

$= \cos\theta + i\sin\theta$

س/ جد حل المعادلة حيث $x \in C$ وباستخدام مبرهنة ديموافر $x^4 + 16 = 0$

sol :

$x^4 = -16$

$x^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

$x = 2(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$

$k = 0, 1, 2, 3$

(1/2018)

If $k = 0$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 1$

$x = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 2$

$x = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

If $k = 3$

$x = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر احسب: $(-1 - \sqrt{-1})^{-3}$

sol :

Let $z = -1 - \sqrt{-1} = -1 - i$

Mod $z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ لان السعه تقع الربع الثالث

(1/2018"خارج القطر")

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^{-3} = \left[(\sqrt{2})^{-3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{-3}$

$= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\left(\cos\frac{15\pi}{4} - i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$

$\therefore (-1 - i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

س/ جد الصيغة القطبية للمقدار $(1+i)^2$,ثم جد الجذور التكعيبية له باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

sol :

Let $z = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ بالربع الاول

(2019/"تمهيدي")

$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^2 = \left[(\sqrt{2})^2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$

$k = 0, 1, 2$

If $k = 0$,

$R_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 1$,

$R_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 2$

$R_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}(0 - i) = -\sqrt[3]{2}i$

باستخدام مبرهنة ديموافر , احسب $(2\sqrt{3}-2i)^{-2}$

sol :

$$z = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$ المقياس

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ زاورية الاشارة $= \frac{\pi}{6}$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$ θ تقع في الربع الرابع

$$Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = \theta$$

(1/2019)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$z^{-2} = (4)^{-2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{-2}$$

$$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{22\pi}{6} - i\sin\frac{22\pi}{6}\right)$$

$$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

حل المعادلة التالية C باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر :

$$\frac{x^3}{i} - 27 = 0$$

(1/2019"تطبيقي ")

(1/2024"محاولات تطبيقي")

sol :

$$\left[\frac{x^3}{i} - 27 = 0\right].i$$

$$x^3 - 27i = 0 \Rightarrow x^3 = 27i$$

$$= 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore x = 27^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$$

عند :-

$$k = 0, 1, 2$$

عندما $k = 0 \Rightarrow x_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

عندما $k = 1 \Rightarrow x_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$= 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

عندما $k = 2 \Rightarrow x_3 = 3\left(\cos\frac{\cancel{9}^{3}\pi}{\cancel{6}_{2}} + i\sin\frac{\cancel{9}^{3}\pi}{\cancel{6}_{2}}\right)$

$$= 3(0 + i(-1)) = -3i$$

$$\therefore S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -3i\right\}$$

س باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27\,i)$.

sol :

$Z = 27\,i$

(1/2019"خارج القطر"تطبيقي")

$\sqrt[3]{2} = (27i)^{\frac{1}{3}}$

$(0\,,27)$ تكتب بالصورة الديكارتية

$Z = \ -r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,)$ بالصورة القطبية

$Z = 27\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$Z^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$ $\qquad k = 0, 1, 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad k = 0$ عندما

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + \sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad k = 0$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \quad = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

$k = 1$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$ تقع في الربع الثاني

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \quad = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

$k = 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} = \frac{9^3\pi}{6^2}$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 3\,(0 - i) = \ -3i$

س اذا كان $Z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت ان $\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$

sol :

$\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$ الطرف الايسر

$\frac{2}{1+\cos 2x+i\sin 2x}$

$= \frac{2}{2\cos^2 x+i(2\sin x*\cos x)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos x(\cos x+i\sin x)}$

$= \frac{1}{\cos x(\cos x+i\sin x)} * \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x-i\sin x}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(1)}$ (1/2019"خارج القطر")

$= \frac{\cos x}{\cos x} - i\frac{\sin x}{\cos x}$

$= 1 - i\tan x =$ الطرف الايمن

س باستخدام مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in C$

sol :

(3/2019)

(2/2024)

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 = \cos\pi + i\sin\pi$

$x = \left[\cos\frac{\pi+2K\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2K\pi}{3}\right]$

$K = 0, 1, 2$ حيث

$K = 0$ عندما

$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$K = 1$ عندما

$x_2 = \left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = \ -1 + 0i = -1$

$K = 2$ عندما

$x_3 = \left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(1-\sqrt{-3})$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

(3/2019 "تطبيقي")

sol :

$\because Z = 1-\sqrt{-3} = 1-\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الرابع $(+,-)$

$\therefore \arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{Z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2}\right)$

عندما $K = 0, 1$

عندما $K = 0 \rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

عندما $K = 1 \rightarrow Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\therefore S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \ , \ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ فاثبت ان: $\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$

(2/2019)

sol :

$$\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}$$

$$= \frac{\cos n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + 2i\sin n\theta\cos n\theta}$$

$$= \frac{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{2\cos n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{1}{2\cos n\theta} = R.H$$

بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذرين التربيعين للعدد المركب $(-1+\sqrt{3}i)$

(2/2020)

sol : $z = -1+\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = \frac{-1}{2} \ , \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

θ تقع في الربع الثاني ، زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$z = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right]$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{2\pi+6k\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right]$

عندما $K = 0$

$\Rightarrow R_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$R_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

عندما $K = 1$

$R_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(-1+\sqrt{3i})$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol :

$Z=-1+\sqrt{3i}$

$x=-1\ ,\ y=\sqrt{3}$

$r=\sqrt{r^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}\ ,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ $\quad\frac{\pi}{3}$ زاوية تقع في الربع الثاني زاوية الاسناد

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(3/2020"تطبيقي")

$Z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore\ Z^{\frac{1}{2}}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+k\pi}{2}\right)\quad K=0,1$

عندما $K=0$

$\Rightarrow Z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$Z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ ....*

عندما $K=1$

$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ ....*

ملاحظة : اذا لم يذكر الطالب هذه الخطوة * يعطى درجة كاملة

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر او التعميم ، احسب :

$\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right]^{-6}$

sol :

$=\sqrt{2}\left(\cos 6\left(\frac{5\pi}{24}\right)-i\sin 6\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(1/2021"احيائي")

$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(1/2022"احيائي")

$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=-1+i$

س/ اذا كانت $Z=\cos 2t+i\sin 2t$ فبرهن ان :

$\frac{2}{1+z}=1-i\tan t$

sol :

الطرف الايسر $\frac{2}{1+z}=\frac{2}{1+\cos 2t+i\sin 2t}$

$=\frac{2}{2\cos^2 t+2i\sin t\cos t}$

(3/2020)

$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos t\,(\cos t+i\sin t)}$

$=\frac{1}{\cos t}*\frac{1}{\cos t+i\sin t}*\frac{\cos t-i\sin t}{\cos t-i\sin t}$

$=\frac{1}{\cos t}*\frac{\cos t-i\sin t}{\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1}}$

$=\frac{\cos t-i\sin t}{\cos t}$

$=\frac{\cos t}{\cos t}-\frac{i\sin t}{\cos t}$

$=1-i\tan t=$ الطرف الايمن

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد $(8i)$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

sol :

$Z=8i\ \Rightarrow Z=8(0+i)$ ....(*)

$\Rightarrow Z=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore Z^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore Z^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi K}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi K}{3}\right)$

$Z^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi K}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi K}{6}\right)$

$K=0,1,2$ حيث

عندما $K=0$

$Z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

(2021/"تمهيدي"احيائي")

$Z_1=\sqrt{3}+i$

عندما $K=1$

$Z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$

عندما $K=2$

$Z_3=2(\cos\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\pi}{\underset{2}{\cancel{6}}}+i\sin\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\pi}{\underset{2}{\cancel{6}}}$

$=2\,(0-i)=0-2i$

ملاحظة : الخطوة (*) يمكن للطالب ان يستخدم خطوات ايجاد المقياس وسعة العدد المركب.

س/ ضع بالصيغة العادية: $\frac{(1+i)^7}{8}$

sol :

الطريقة الأولى:

(2/2021"احيائي ")

$$\frac{(1+i)^7}{8}=\frac{(1+i)^6.(1+i)}{8}$$
$$=\frac{[(\cancel{1}+2i-\cancel{1})]^3.(1+i)}{8}$$
$$=\frac{(+2i)^3(1+i)}{8}$$
$$=\frac{-\cancel{8}i.(1+i)}{\cancel{8}}$$
$$=1-i$$

الطريقة الثانية: نجد $(1+i)^7$ باستخدام ديموافر

$$Z=(1+i)$$
$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{زاوية الاسناد} = \frac{\pi}{4}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

θ تقع في الربع الاول

$$arg(Z)=\frac{\pi}{4}$$
$$Z=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$Z^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7$$
$$=8\sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$$
$$=8\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$
$$=8(1-i)$$
$$=\frac{7^7}{8}=\frac{(1+i)^7}{8}=\frac{\cancel{8}(1-i)}{\cancel{8}}=(1-i)$$

الطريقة الثالثة:

$$\frac{(1+i)^7}{8}=\frac{2(1+i)^7}{2(8)}=\frac{2(1+i)^7}{16}$$
$$=\frac{2\,(1+i)^7}{(2i)^4}=\frac{2\,(1+i)^7}{[(1+i)^2]^4}$$
$$=\frac{2\,(1+i)^7}{(1+i)^8}=\frac{2\,\cancel{(1+i)^7}}{(1+i)^8}$$
$$=\frac{2}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i}{1+1}$$
$$=\frac{\cancel{2}\,(1-i)}{\cancel{2}}=1-i$$

س/ اذا كان $Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدداً مركباً، جد باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $\sqrt{Z}$

sol :

(2/2022"احيائي ")

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}.\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$Z=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{1+3}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{-1}{2}}{1}=\frac{-1}{2} \qquad \text{زاوية الاسناد} = \frac{\pi}{3}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

θ تقع في الربع الثالث

$$Arg(Z)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$
$$Z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$Z=(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$$
$$Z^{\frac{1}{2}}=(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2})$$

حيث $k=0,1$

عندما $k=0$

$$Z^{\frac{1}{2}}=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$
$$=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذر الاول

عندما $k=1$

$$Z^{\frac{1}{2}}=(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذر الثاني

بسط: $\left[\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}$

(2/2021"احيائي ")

sol :

الطريقة الأولى:

$$\left[\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}$$

$$\because \sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}$$

$$=\left[\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

$$=\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الطريقة الثانية:

$$\left[\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}=\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^{-5}$$

$$\therefore Z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}$$ $\theta=\frac{\pi}{3}=$ زاوية الاسناد

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ θ تقع في الربع الاول

$$Arg(Z)=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore Z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z^{-5}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-5}$$

$$=\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الطريقة الثالثة:

$$\left[\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}=\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^{-5}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right]^{-5}=2^5\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i}\right)^5$$

$$=32\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^5$$

$$=32\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+3}\right)^5=32\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)^5$$

$$=32\frac{(1-\sqrt{3}i)^5}{4^5}=32\frac{1\left[(1-\sqrt{3}i)^2\right]^2(1-\sqrt{3}i)}{4^5}$$

$$=32\frac{(1-2\sqrt{3}i-3)^2(1-\sqrt{3}i)}{4^5}$$

$$=32\frac{(-2-2\sqrt{3}i)^2(1-\sqrt{3}i)}{4^5}$$

$$=32\left[\frac{4(1+\sqrt{3}i)^2(1-\sqrt{3}i)}{4^5}\right]$$

$$=32\frac{(1+2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{4^4}$$

$$=32\frac{(-2+2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{4^4}$$

$$=32\frac{-2(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{4^4}$$

$$=32\frac{-2(1-2\sqrt{3}i-3)}{4^4}$$

$$=32\frac{-2(-2-2\sqrt{3}i)}{4^4}=32\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4^{4^3}}$$

$$=32\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{64}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بسط المقدار: $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

sol :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4[(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)]^4$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos^2\theta+i\sin^2\theta) \quad ,$$

$$\cos^2\theta+i\sin^2\theta=1$$

$$=\cos4\theta+i\sin4\theta$$

(2/2022"تطبيقي ")

حل المعادلة باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر:

$$Z^2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}} = 0$$

sol :

$$Z^2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \implies Z^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{1+3}$$

$$Z^2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ بجذر الطرفين

("تطبيقي"1/2022)

$$Z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$$ زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$ θ تقع في الربع الثالث

$$Arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

("تطبيقي"1/2023)

$$\left[1\left(\cos\frac{4\pi}{3} i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$$

If $k = 0 \rightarrow \left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right)$

$-$ $+$

ربع ثاني $\rightarrow \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\rightarrow \left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$

If $k = 1 \Rightarrow \left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$

ربع رابع $\rightarrow \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$\rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$

احسب باستخدام مبرهنة ديموافر او تعم1يمها :

$$\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{9\pi}{8} - i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

sol :

$$\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{9\pi}{8} - i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{13}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-9}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{13-9} = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{4}$$

$$= \left(\cos\frac{4\pi}{8} + i\sin\frac{4\pi}{8}\right)$$

("احيائي"2/2022)

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (0 + i)$$

ملاحظة / من الخطوة الاولى يمكن جعل الاسس سالبة للقوس الاول واكمال الحل

باستخدام مبرهنة ديموفر احسب ما يأتي: $(-2+2i)^5$

sol :

$z = -2 - 2i$ ليكن

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+4}$

("تطبيقي"2/2022)

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ زاوية الاسناد هي $= \frac{\pi}{4}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (θ) تقع في الربع الثاني

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z^5 = \left(2\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5$$

$$= 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} - i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$= 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= 128\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 128 + 128i$$

س: حل المعادلة التالية C باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر :

$$\frac{2z^3}{i} + 16 = 0$$

sol :

(1/2023 "أحيائي ")

$$\frac{2Z^3}{i} + 16 = 0$$

$$Z^3 + 8i = 0 \Rightarrow Z^3 = -8i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2} = 8$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ الصيغة القطبية

$$Z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$$

عند :-

$$k = 0, 1, 2$$

عندما $k = 0 \Rightarrow Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$= 2(0 + i) = 0 + 2i$$

عندما $k = 1 \Rightarrow Z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

عندما $k = 2 \Rightarrow Z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

$$\therefore S = \{0 + 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}$$

س: باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{1+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

Sol :

$$z = \frac{1 + wi + w^2i}{1 - wi - w^2i} = \frac{1 + i(w + w^2)}{1 - i(w + w^2)}$$

$$= \frac{1 - i}{1 + i}\cdot\frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 - i - i + i^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

1/2016

$$z = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\to z^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)$$

$; k = 0, 1$

$$\text{If } k = 0 \to z^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right)$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{if } k = 1 \to z^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

س: اثبت ان :

$$\left[\frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^2}\right].(\cos\theta + i\sin\theta)^{-2} = 1$$

sol :

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}[\cos\theta + i\sin\theta]^{-2}$$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta]^2.[\cos\theta + i\sin\theta]^{-2}$$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta]^0 = 1$$

(2/2023 "تطبيقي ")

احسب باستخدام مبرهنة ديموافر : $(1-\sqrt{3i})^{-4}$

sol :

Let $Z = 1 - \sqrt{3i}$

$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

θ تقع في الربع الرابع

$\therefore Arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(2/2023"أحيائي ")

$Z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z^{-4} = 2^{-4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]^{-4}$

$Z^{-4} = \frac{1}{16}\left[\cos\frac{20\pi}{3} - i\sin\frac{20\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{16}\left[\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = \frac{-1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$

بسط باستخدام مبرهنة ديموافر :

$\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right]^6$

sol :

$= \sqrt{2}\left(\cos 6\left(\frac{5\pi}{24}\right) + i\sin 6\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

(3/2023"أحيائي ")

$= -1 - i$

جد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^3$ ، ثم جد الجذور التربيعيه له

sol : $z = \sqrt{3} + i$

$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ لان السعه تقع الربع الاول

(3/2023"تكميلي ")

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$\rightarrow z^3 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$

$\rightarrow z^3 = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

هذه الصيغة القطبية للمقدار

ولإيجاد الجذران التربيعيان له نستخدم مبرهنة ديموافر

$\because z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{4}\right)$

$k = 0\ ,1$

If $k = 0$

$\rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 + 2i$

If $k = 1$

$\rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 - 2i$