40 درجة في الوزاري

1 الاسئلة الوزارية حول "المعادلات المرتبطة بالزمن"

الحالة الأولى :- الاشكال الهندسية

س بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطرة $\frac{7}{22} cm/s$ بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره $10\ cm$ جد:
1) معدل نقصان حجمه 2) معدل نقصان مساحته السطحية

sol :

نفرض ان نصف قطر الكره r وحجمها v ومساحتها السطحية A

(1/2004)

$$1) v = \frac{4\pi}{3} r^3$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\frac{22}{7}(100)\frac{-7}{22} = -400\, cm^3/s$$
$$2) A = 4\pi r^2$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r \frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\frac{22}{7}(10)\frac{-7}{22} = -80\, cm^2/s$$

س خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعه طولها $2m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\, cm^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في اي زمن t

sol :

نفرض ان الارتفاع =h , طول ضلع القاعدة المربعة = X
حجم متوازي المستطيلات = v

(1/2011)

(2/2013)

("2/2017 "أسئلة الموصل)

("2023/تمهيدي "أحيائي)

$$v = x^2 h$$
$$x = 2\, m$$
$$\rightarrow v = 4h$$
$$\frac{dv}{dt} + 4\frac{dh}{dt}$$
$$\rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\, m/h$$
$$\frac{dh}{dt} = -0.1\, m/h$$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان

س بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (200π) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية $80\ m^2/s$

sol :

نفرض ان حجم البالون=V , ومساحته السطحية =A ,
ونصف قطره = r

(2/2008)

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}} = 200\,\pi$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi \frac{d2r}{dt}$$
$$\frac{d2r}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \ldots\ldots (1)$$
$$v = \frac{4\pi}{3} r^3$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\,\pi\, r^2 \frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$4\,\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10$$
$$A = 4\,\pi\, r^2$$
$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\,\pi\, r \frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow -80 = 80\,\pi \frac{dr}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{\pi}$$ تعوض اما في(1) او في(2)
$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \cdot \frac{-1}{\pi}$$
$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -400\ m^3/s$$ معدل تغير الحجم
$$\rightarrow 400\ cm^3/s$$ معدل نقصانه

شبكة المساعد
@SadsHelp

س صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $(96cm)$ يتمدد عرضها بمعدل $(2\ cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في الطول وذلك عندما يكون طولها $(12\ cm)$.

sol :

لتكن A مساحة الصفيحة

x طول الصفيحة

y عرض الصفيحة

$A = xy$

$96 = xy$

$\frac{dy}{dt} = 2$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ ..... (1)

$\frac{dx}{dt} = ?$, $x = 12$

$96 = 12y$

$\rightarrow y = \frac{96}{12} = 8$ نعوضها في (1)

$0 = 12(2) + 8\frac{dx}{dt}$

$0 = 24 + 8\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow 8\frac{dx}{dt} = -24$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-24}{8} = -3\ cm/s$

("تطبيقي "3/2019)

("تمهيدي "2024/)

س صفيحة مستطيلة الشكل من المعدن مساحتها $(192)\ cm^2$ يتناقص عرضها بمعدل $\frac{4}{3}\ cm/s$ بحيث تبقى المساحة ثابتة ، جد معدل تمدد طولها عندما يكون الطول $(12)cm$

sol :

نفرض الطول $= x$

نفرض العرض $= y$ $\Leftarrow$ $\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3}\ cm/s$

المساحة $= A$

$A = x.y$

$192 = (12)y \Rightarrow y = \frac{192}{12} = 16\ cm$

$192 = x.y$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$

$0 = 12^{4}\left(\frac{-4}{\frac{3}{1}}\right) + 16\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{16}{16}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1\ cm/s$

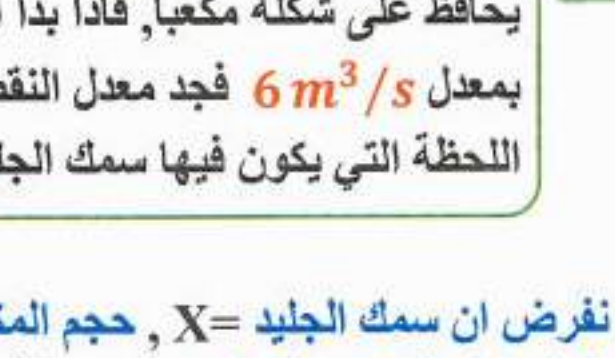
("تمهيدي" احيائي 2021/)

س صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتاً , جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$

sol :

نفرض عرض المستطيل $= y$, طول المستطيل $= X$,

مساحة المستطيل $= A$



$A = Xy$

$96 = 8x$

$\rightarrow x = 12$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$0 = 12\frac{dy}{dt} + (8)(2)$

$\rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}cm/s$

(2/2011)

(3/2014)

("أسئلة النازحين"1/2015)

س مكعب صلد طول حرفه $8\ m$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا, فاذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\ m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $1m$

sol :

نفرض ان سمك الجليد $= X$, حجم المكعب $=$ (طول الضلع)^2

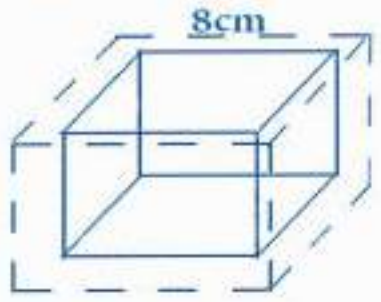
طول ضلع المكعب الصغير $= 8 \leftarrow (8)^3 = v_1$

طول ضلع المكعب الكبير $= (8+2x) \leftarrow (8+2x)^3 = v_2$

$v = v_2 - v_1$

$\rightarrow v = (8+2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2.(2)\frac{dx}{dt} + 0$



$\rightarrow -6 = 3(8+2x)^2.(2)\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100}m/s$

$\frac{dx}{dt} = -0.01\ m/s$ معدل تغير سمك الجليد

$OR\ \frac{dx}{dt} = 0.01\ m/s$ معدل نقصان سمك الجليد

("خارج القطر"1/2011)

("خارج القطر"1/2014)

("تطبيقي "تمهيدي"2023/)

("احيائي "2/2021)

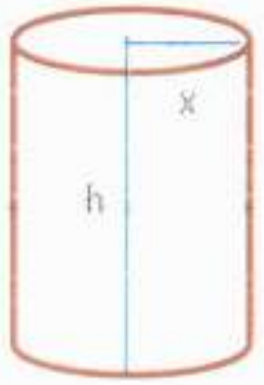
شبكة المساعد
@SadsHelp

س اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساوياً $320\ \pi\ cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها يكون ارتفاعها $5\ cm$

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة $=X$, ارتفاعها $=h$

حجمها v



(2/2000)

(2/2003)

$$v = \pi x^2 h$$

$$\rightarrow 320\,\pi = \pi x^2 h$$

$$\rightarrow 320 = x^2 h$$

$$h = 5$$

$$\rightarrow 320 = 5x^2$$

$$\rightarrow x^2 = 64 \quad \rightarrow x = 8$$ تعوض بعد الاشتقاق

$$0 = x^2 \frac{dh}{dt} + h\,.\,2x \frac{dx}{dt}$$

("تمهيدي"/2006)

$$\rightarrow 0 = 64(0.5) + 5(16)\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.4\ cm/s$$

س كرة صلدة قطرها $8\ cm$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث شكلها يبقى كرة, فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $5\ m^3/s$ جد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $1\ cm$

sol :

نفرض سمك الجليد $= X$,

نفرض نصف قطر الكرة مع الجليد $= 4+x$, المطلوب $\frac{dx}{dt}$

$$V = \frac{4}{3}(4+X)^3\pi$$

("3/2016"خارج القطر ( )

$$\frac{dv}{dt} = 4(4+X)^2 \frac{dx}{dt}\pi$$

$$\rightarrow -5 = 4(4+1)^2\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow -5 = 100\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{100\pi}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{20\pi}\,cm/s$$

س كرة صلدة نصف قطرها $(4cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرة فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(10\ cm^3/s)$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $(1cm)$

sol :

نفرض سمك الجليد $= x$

والمطلوب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

نفرض حجم الجليد $= v$ $\Leftarrow$ $\frac{dv}{dt} = -10$

حجم الجليد = حجم الكرة مع الجليد − حجم الكرة

$$v = \frac{4}{3}(4+x)^3\pi - \frac{4}{3}(4)^3\pi$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(4+x)^2\ \frac{dx}{dt} - 0$$

("تطبيقي"1/2019)

$$-10 = 4\pi(4+1)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 100\,\pi\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-10}{100\,\pi}$$

$$= \frac{-0.1}{\pi}\ cm/s$$

س متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3\ cm/s$ والارتفاع يتناقص بمعدل $0.5\ cm/s$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4\ cm$ والارتفاع $3\ cm$

sol :

نفرض طول ضلع القاعدة $= x$

نفرض طول ارتفاعه $= y$

$$\frac{dy}{dt} = -0.5\ ,\frac{dx}{dt} = 0.3\ ,y = 3\ \ ,x = 4$$

$$V = Ay$$

(3/2019)

$$V = x^2 y$$

("احيائي"1/2022)

$$\frac{dv}{dt} = x^2.\frac{dy}{dt} + y.2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2.(-0.5) + (3).2(4).(0.3)$$

$$= (16)\ (-0.5) + (24).(0.3)$$

$$= -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$ التغير في الحجم

سكة المساعد
@SadsHelp

س متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل التغير في حجمه ومساحة السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة $8cm$ علما ان معدل التغير في طول القاعدة $\frac{1}{4} cm/sec$

sol :

نفرض ابعاد الشكل $3X , X , X$

$\rightarrow v = x^2(3x)$

$\rightarrow v = 3x^3$

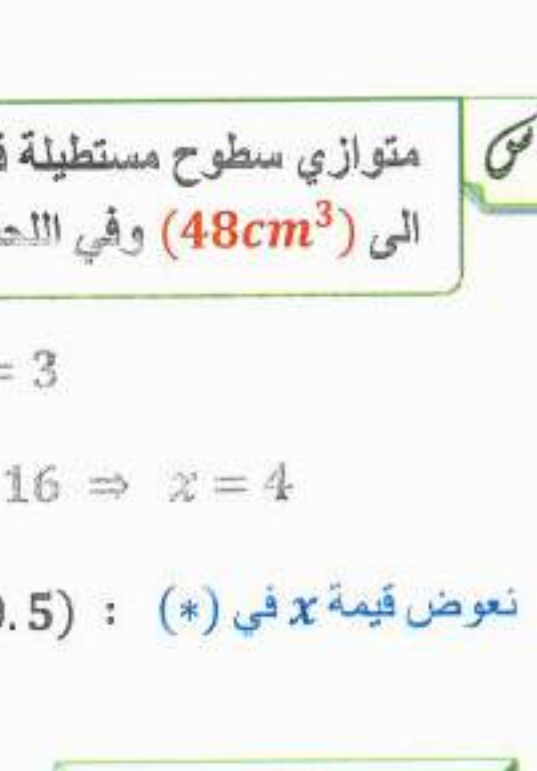
$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 9.(8)^2.\left(\frac{1}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 9.(64).\left(\frac{1}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 144\ cm^3/s$

(1/2016"خارج القطر")



$A = (4x).(3x) + 2x^2$

$\rightarrow A = 12x^2 + 2x^2$

$\rightarrow A = 14x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8)\left(\frac{1}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 56\ cm^2/s$

س متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلعه بمعدل $(0.4\ cm/s)$ بحيث يبقى الحجم ثابت دائما $(640cm^3)$ جد معدل التغير في الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $10cm$

sol :

نفرض ضلع القاعدة $= X$, نفرض الارتفاع $= y$, والحجم V

$V = x^2\ y$

$640 = x^2 * 10$

$\rightarrow x^2 = 64$

$\rightarrow x = 8$

(1/2017"خارج القطر")

$640 = x^2 . y$

$0 = x^2 \frac{dy}{dt} + y * 2x \frac{dx}{dt}$

(2/2017)

$= 64 \frac{dy}{dt} + 10 + 2 * 8 * 8 * (0.4)$

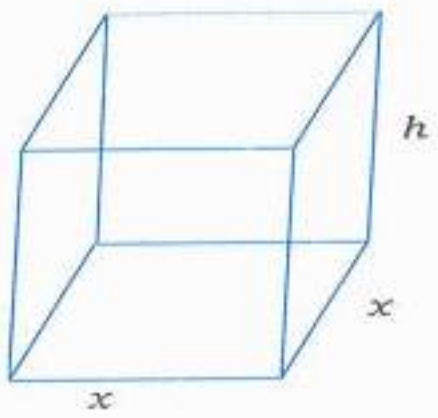
$\frac{dy}{dt} = \frac{-64}{64}$

$= -1\ cm/s$

س متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.5cm/s)$ بحيث يبقى حجمه دائما مساويا الى $(48cm^3)$ وفي اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $3cm$, جد معدل تغير الارتفاع

sol :

1. نفرض طول ضلع القاعدة $x =$
2. نفرض ارتفاعه $h =$



$\frac{dx}{dt} = 0.5\ cm/s$

$v = x^2 . h$

$48 = x^2\ . h$

$0 = x^2 . \frac{dh}{dt} + h . 2x \frac{dh}{dt}$ ..... (*)

$v = x^2 . h \quad \because h = 3$

$\therefore 48 = x^2 . 3 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

نعوض قيمة x في (*) : $0 = 16 \frac{dh}{dt} + (3)(8)(0.5)$

$-16 \frac{dh}{dt} = 12$

$\frac{dh}{dt} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}\ cm/s$

(1/2022"احيائي")

شبكة المساعد
@SadsHelp

س كرة معدنية نصف قطرها $(8cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرة فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(10\ cm^3/s)$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون سمكها $(2cm)$

sol :

نفرض سمك الجليد $= x$

والمطلوب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 2$

نفرض حجم الجليد $= v \Leftarrow$ $\frac{dv}{dt} = -10$

حجم الجليد = حجم الكرة مع الجليد − حجم الكرة

$$v = \frac{4}{3}(8+x)^3\pi - \frac{4}{3}(8)^3\pi$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(8+x)^2\ \frac{dx}{dt} - 0$$

$$-10 = 4\pi(8+2)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 400\,\pi\frac{dx}{dt}$$

("احيائي"3/2023)

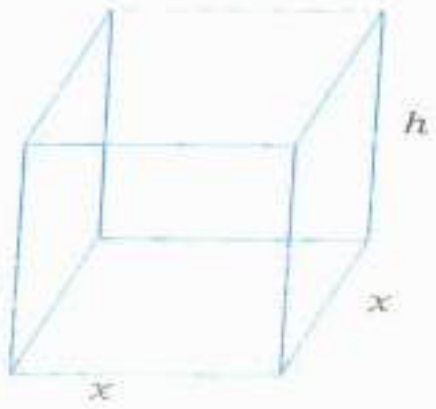
$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-10}{400\,\pi}$$

$$= \frac{-1}{40\,\pi}\ cm/s$$

س متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.5cm/s)$ بحيث يبقى الحجم دائما ثابت مساويا الى $(48cm^3)$ وفي اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة $(4cm)$, جد معدل تغير الارتفاع

sol :

1. نفرض طول ضلع القاعدة $x =$
2. نفرض الارتفاع $y =$
3. نفرض الحجم $v =$



$$\frac{dx}{dt} = 0.5\ cm/s$$

$$v = x^2.y$$

$$48 = 16\,y$$

$$y - \frac{48}{16} = 3$$

$$v = x^2.y$$

(2/2024)

$$48 = x^2\,.y$$

$$0 = x^2.\frac{dy}{dt} + y.2x\frac{dx}{dt}$$

$$0 = (4)^2\frac{dy}{dt} + (3)(2).(4).(0.5)$$

$$0 = 16\frac{dy}{dt} + 12$$

$$16\frac{dy}{dt} = -12$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}\ cm/s$$

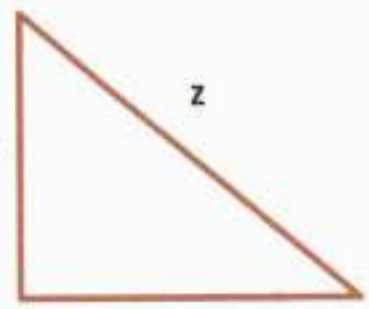
شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة الثانية :- مثلث قائم الزاوية

س سلم طوله 13 m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $4\,m/sec$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 5m من الحائط .

sol :

1. نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط X
2. ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y



$$x^2 + y^2 = 169$$
$$25 + y^2 = 169$$
$$\rightarrow y^2 = 144$$
$$\rightarrow y = 12$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$
$$(2)(5)(4) + (2)(12)\frac{dy}{dt} = 0$$

(2/2009)

$$\rightarrow 24\frac{dy}{dt} = -40$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{3}m/sec$$

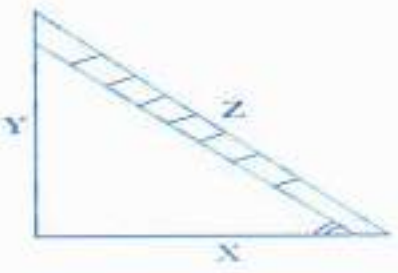
س سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\,m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :

نفرض طولي الضلعين القائمي y , X ,
وليكن طول الوتر Z (عددا ثابتا)

$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots(1)$$

(1/2024 "محاولات")



$$tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow y = \sqrt{3}\,x \ldots\ldots(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{dx}{dt} = 2$, $y = \sqrt{3}\,x$ في معادلة رقم (1)

$$0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}$$

(1/2013 "خارج القطر")

يهمل $2x = 0 \rightarrow x = 0$ اما

(1/2015 "خارج القطر")

او $2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = -4x$

(2018/ "تمهيدي")

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}}m/s$$

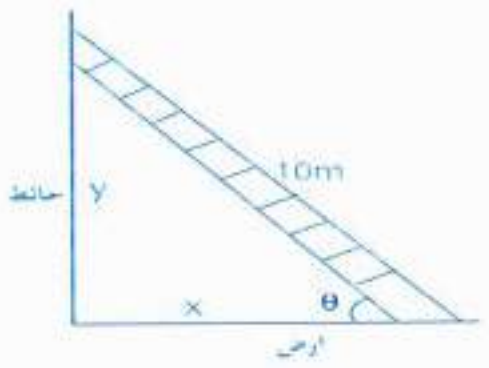
(1/2024)

س سلم طوله 10 m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\,m/sec$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد:
1)معدل انزلاق طرفه العلوي.
2)سرعه تغير الزاوية بين السلم والارض.

sol :

1. نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط X

ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y



$$x^2 + y^2 = 100$$
$$64 + y^2 = 100$$
$$\rightarrow y^2 = 36 \quad \rightarrow y = 6$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$
$$(2)(8)(2) + (2)(6)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32 \quad \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}m/sec$$

2. نفرض ان الزاوية بين السلم والارض $\theta =$

$$\sin\theta = \frac{y}{10}$$

(1/2012)

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{1}{10}y$$

(2014/"تمهيدي")

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

(2/2014)

$$\because \cos\theta = \frac{x}{10}$$

(1/2023 "تطبيقي")

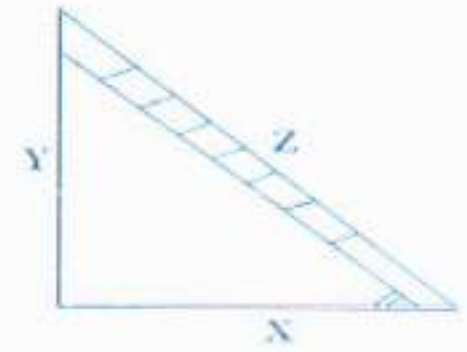
$$\rightarrow \frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3}\ rad/sec$$ معدل تغير الزاوية بين السلم والارض

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\ rad/sec$$ سرعه نقصان الزاوية بين السلم والارض

س سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5}m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :

نفرض طولي الضلعين القائمي y , X ,
وليكن طول الوتر z (عددا ثابتا)



$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots (1)$$
$$tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow y = \sqrt{3}\,x \quad \ldots\ldots (2)$$
$$0 = 2x\left(\frac{1}{5}\right) + 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = -0.4x$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{0.2}{2\sqrt{3}}m/s$$

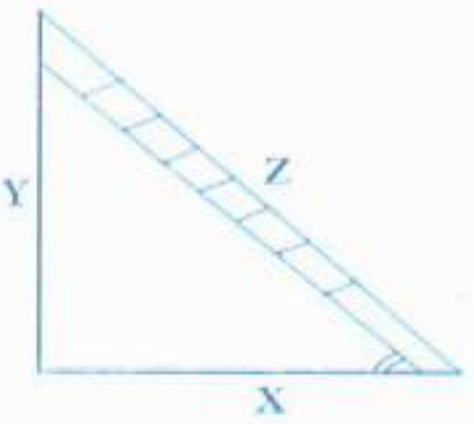
(4/2015"اسئلة النازحين")

س سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\,m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{4}$

sol :

نفرض ارتفاع الطرف العلوي للسلم عن الارض= y ,ونفرض بعد الطرف السفلي عن الحائط= X , ونفرض طول السلم = z

$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots (1)$$
$$tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow 1 = \frac{y}{x}$$
$$\rightarrow y = x \quad \ldots\ldots (2)$$
$$0 = 2x(2) + 2x\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow 2x\frac{dy}{dt} = -4x$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\,m/s$$



(2/2016)

ملاحظة / اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجة واحدة والفرضية بالنسبة للرموز حسب رغبة الطالب

س طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة $80\,km/h$ وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعة $60\,km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة

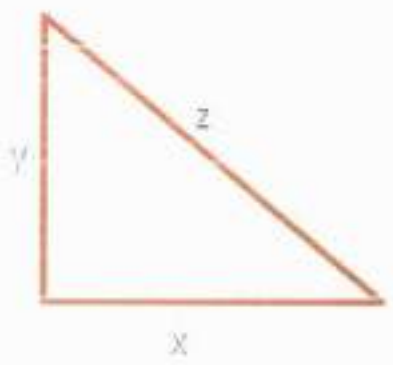
sol :

نفرض ان الطريقان المتعامدان x , y والبعد بين السيارتين Z

$$\because \frac{dx}{dt} = 30$$
$$\rightarrow x = 30\left(\frac{1}{4}\right) = 20 \quad after\ \frac{1}{4}h$$

(1/2009)

$$\because \frac{dy}{dt} = 60$$
$$\rightarrow y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15 \quad after\ \frac{1}{4}h$$
$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$z^2 = 400 + 225 = 625$$
$$\rightarrow z = 25$$



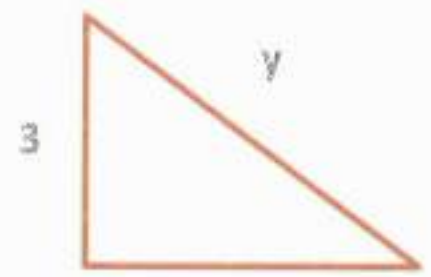
$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$
$$25\frac{dz}{dt} = (80)(20) + (60)(15)$$
$$25\frac{dz}{dt} = 2500$$
$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = 100\,km/h$$

س سيارة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها $3m$ عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\,m$ اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية.

sol :

نفرض ان بعد السيارة عن مسقط الاشارة المرورية على الارض x
ونفرض ان بعدها عن الاشارة y

$$y^2 = x^2 + 9$$
$$y = 3\sqrt{3}$$
$$\rightarrow 27 = x^2 + 9$$
$$\rightarrow x^2 = 18 \quad \rightarrow x = 3\sqrt{2}$$



$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$
$$\rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$
$$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}\,(30)$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3\sqrt{2}\,(30)}{3\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$$

(1/1997)

سكة المساعد
@SadsHelp

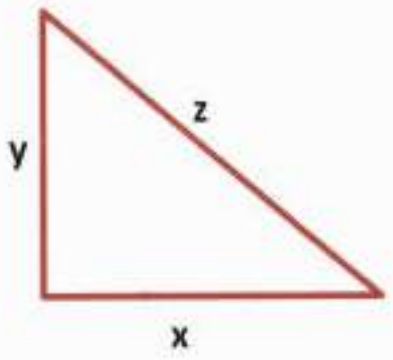
س تحركت سيارتان السيارة الاولى باتجاه الشرق بسرعة $(40\ km/h)$ والثانية باتجاه الشمال بسرعة $(30\ km/h)$ جد معدل تغير المسافة بين السيارتين بعد ان تكون الاولى قطعت $(4\ Km)$ والثانية $(3km)$

sol :

نفرض المسافة باتجاه الشمال $= x$

ونفرض المسافة باتجاه الشرق $= y$

ونفرض المسافة بين السيارتين $= z$



$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = 5$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dz}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\ \} \div 2$$

(1/2019)

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$5\frac{dz}{dt} = 3 * 30 + 4 * 40$$

$$5\frac{dz}{dt} = 90 + 160$$

$$\frac{dz}{dt} = 50\ \text{km/h}$$

ملاحظة :-

1) الرسم ان كان غير موجود يخصم من الطالب درجة واحدة

2) اذا كانت الفرضية معاكسة يرجى انتباه المصحح للتعويض مع التقدير

س تحركت شاحنتان من مستودع ,الشاحنة (A) بسرعة $(40\ k/h)$ شرقاً والشاحنة (B) بسرعة $(30\ h/k)$ شمالاً, ما معدل تغير المسافة بين الشاحنتين عندما تكون الشاحنة (A) على بعد $(4km)$ والشاحنة (B) على بعد $(3km)$ من المستودع؟

sol :

نفرض بعد الشاحنة الاولى A عن المستودع $= x$,

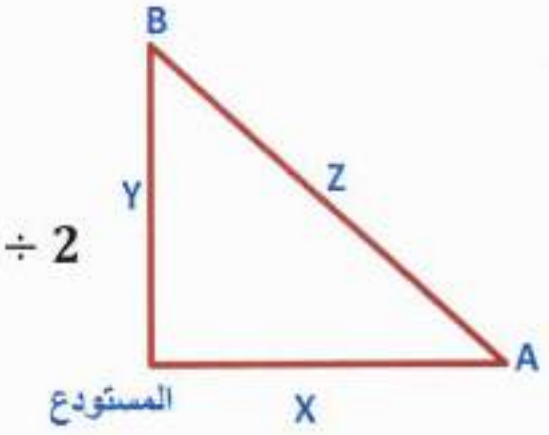
نفرض بعد الشاحنة الثانية B عن المستودع $= y$,

نفرض المسافة بين الشاحنتين $= z$

$z^2 = x^2 + y^2$ عندما $x = 4\ \ , y = 3$

$z^2 = 16 + 9$

$\rightarrow z^2 = 25\ \rightarrow z = 5$



$\therefore y^2 = x^2 + z^2$

$\rightarrow y^2 = x^2 + 900$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}] \div 2$$

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$5\frac{dz}{dt} = (4)(40) + (3)(30)$$

$$5\frac{dz}{dt} = 160 + 90$$

(2/2017)

$$\rightarrow 5\frac{dz}{dt} = 250] \div 5$$

$$\frac{dz}{dt} = 50\ km/h$$

س وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها$(30\ m)$ لاحظ على الارض ارنب فطار نحوه بسرعة $(80\ m/s)$ جد معدل تغير موقع الارنب اذا كان بعده عن الشجرة $(40\ m)$

sol :

نفرض بعد الصقر عن الارنب $= Y$

نفرض بعد الارنب عن قاعدة الشجرة $= X$

نفرض ارتفاع الشجرة $= Z = 30$

$\frac{dy}{dt} = 80\ m/s\ \ , \frac{dx}{dt} = ?$

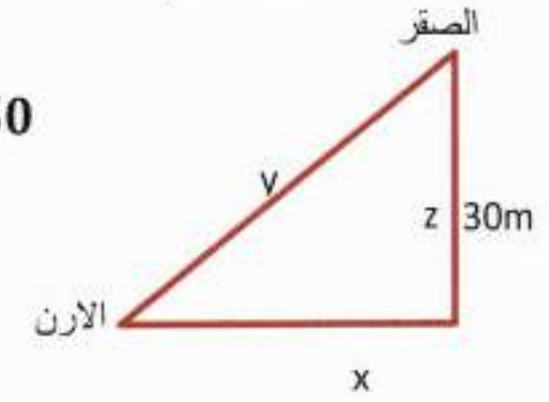
$y^2 = x^2 + z^2$ عندما $x = 40\ \ , z = 30$

$y^2 = 1600 + 900$

$\rightarrow y^2 = 2500\ \rightarrow y = 50$

$\therefore y^2 = x^2 + z^2$

$\rightarrow y^2 = x^2 + 900$



$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}] \div 2$$

$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

(3/2017)

$$50(80) = 40\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{4000}{40} = 100\ m/s$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة الثالثة :- اذا وجد في السؤال مخروط دائري

س مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل 4 cm

sol :

نفرض ان ارتفاع الماء = h , قطر قاعده الماء= X ,

حجم الماء المخروطي الشكل = V

$$v = \frac{\pi}{3}x^2h$$

$$tan\theta = \frac{8}{24} = \frac{x}{h}$$

$$8h = 24x$$

$$\rightarrow h = 3x$$

$$v = \frac{\pi}{3}x^2(3x)$$

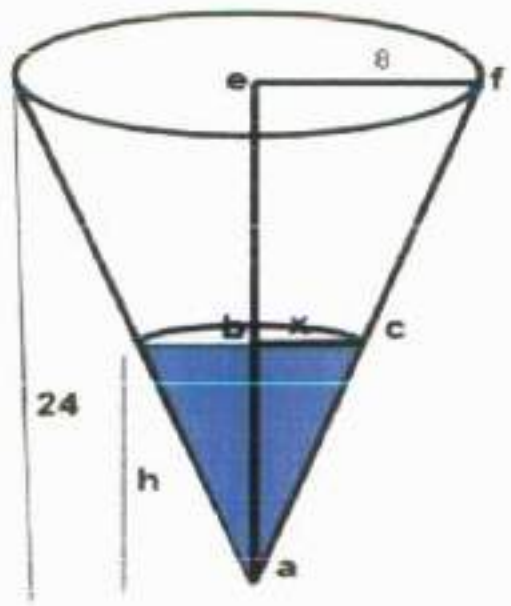
$$\rightarrow v = \pi x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\pi x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$4 = 3\pi(4)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4}{48\pi}$$

$$= \frac{1}{12\pi}\ cm/s$$



("4/2014 اسئلة نازحين الانبار")

س مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للاسفل ارتفاعه $24cm$ وطول قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $3\ cm$

sol :

نفرض حجم المخروط المائي $= V$

$\frac{dv}{dt}$ = معدل التسرب – معدل الصب

$= 5cm - 1\ cm$

$= 4\ cm$

("2/2019 تطبيقي")

نفرض نصف قطر المخروط المائي $= r$

المطلوب $\frac{dv}{dt}$ عندما $r = 3$

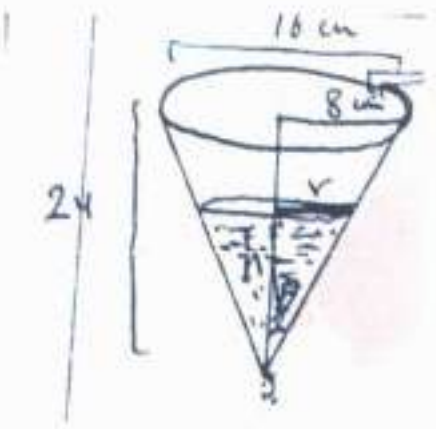
ارتفاع المخروط المائي $= h$

$V = \frac{\pi}{3}r^2h$ ..... (1)

$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24}$

$8h = 24\,r$

$h = 3r$ ..... (2)



ملاحظة :- يمكن ايجاد العلاقة من تشابه المثلثات

$\frac{r}{8} = \frac{h}{24} \quad \Rightarrow h = 3r$

نعوض (2) في (1)

$V = \frac{\pi}{3}\ r^2\ (3r)$

$V = \pi\, r^3$

$\frac{dv}{dt} = 3\pi r^2\ \frac{dr}{dt}$

$4 = 3\,\pi\,(3)^2 \frac{dr}{dt}$

$4 = 27\,\pi \frac{dr}{dt}$

$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{4}{27\,\pi}\ \ cm/s$

شبكة المساعد
@SadsHelp

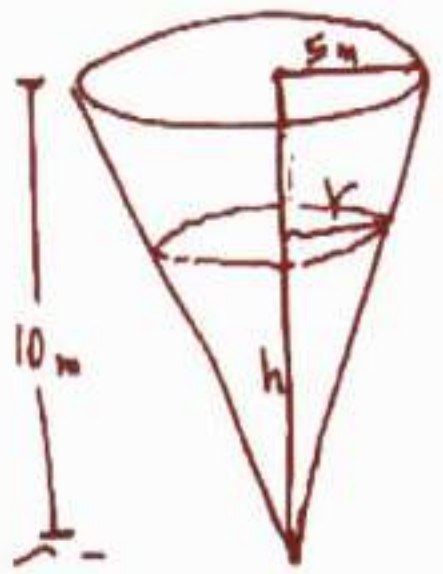
س يراد ملىء خزان على شكل مخروط دائري قائم راسه الى الاسفل ,طول نصف قطر قاعدته يساوي $(5\ m)$ والارتفاع يساوي $(10m)$ فاذا كان معدل ملىء الماء $(2\ m^3/min)$ جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6\ m)$

sol :

نفرض نصف قطر المخروط = r , نفرض الارتفاع = h ,

نفرض الحجم = v

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ... ... (1)



$tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{5}{10}$

$\rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2} \rightarrow 2r = h$

$\rightarrow r = \frac{1}{2}h$ ... ... (2)

نعوض(2) في(1)

$v = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$

$v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}h^2 \cdot h$

$\rightarrow v = \frac{\pi}{12}h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12}3h^3 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi(6)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \rightarrow 2 = 9\pi\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi\, 36 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} = m/min$

(1/2018)

س يتسرب رمل ناعم من خزان على ارض مستوية مكونا مخروطا دائريا قائما بحيث ارتفاعه يساوي قطر قاعدته فاذا كان معدل التسرب $(25\ cm^3/s)$ جد معدل تزايد نصف قطر قاعدته عندما يساوي $(5\ cm)$

sol :

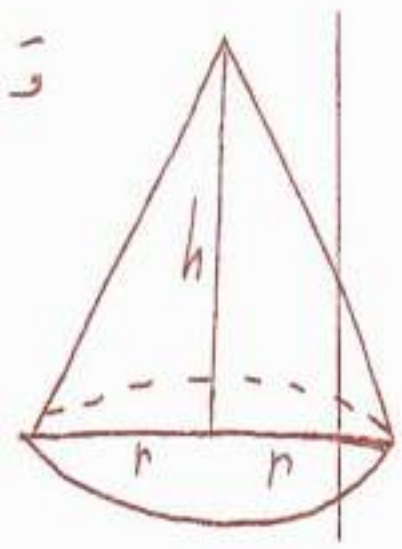
نفرض ارتفاع المخروط = h

نفرض قطر قاعدته = 2r

$\because 2r = h$ ... ... (1)

المخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ... ... (2)

نعوض (1) في (2)



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$

$V = \frac{2\pi}{3}r^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$

$25 = 2\pi\,(5)^2 \frac{dr}{dt}$

$25 = 50\pi \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{25}{50\pi} = \frac{1}{2\pi} cm/s$

(1/2019 "تطبيقي"خارج القطر")

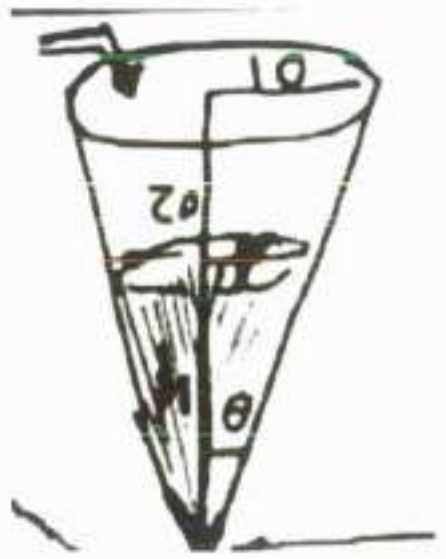
شبكة المساعد
@SadsHelp

س مرشح على شكل مخروط دائري قائم قاعدته افقية ورأسه الى الأسفل تصب به حنفية ماء بمعدل $5\ cm^3/s$ ويتسرب الماء من رأسه بمعدل $2\ cm^3/s$ اذا كان نصف قطر قاعدته $10\ cm$ والارتفاع $20\ cm$ جد معدل تغير ارتفاع الماء في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $15\ cm$

sol :

نفرض ان ارتفاع الماء = h , نصف قطر = r ,

حجم الماء المخروطي الشكل = V



$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{10}{20} = \frac{r}{h}$$

$$10h = 20r \ ] \div 10$$

$$\rightarrow h = 2r \quad \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

معدل التغير بالحجم = معدل الزيادة + معدل النقصان

$$\frac{dv}{dt} = 5 + (-2) = 3$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad \rightarrow v = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^2 . h$$

$$\rightarrow v = \frac{\pi}{3} \frac{h^2}{2} . h \quad \rightarrow v = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12} 3h^2 \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$3 = \frac{\pi}{4} (15)^2 \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad 3 = \frac{\pi}{4} (255) \frac{dh}{dt}$$

$$12 = 255\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{12}{255\pi}$$

$$= \frac{4}{75\pi}\ cm/s$$

("أحياني"1/2023)

ملاحظة : الرسم غير مطلوب ولا يحاسب الطالب عليه

س مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي $24\ cm$ وطول قطر قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $12\ cm$

sol :

نفرض ان ارتفاع الماء = h , قطر قاعده الماء= r

$$r = 8 \rightarrow 2r = 16$$

$$h = 24$$

$$\frac{8}{r} = \frac{24}{h}$$

$$8h = 24r$$

$$\rightarrow h = 3r \qquad \frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\ cm3/s$$

$$r = \frac{h}{3} \rightarrow \ldots\ldots(1$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \ \ldots\ldots(2$$

نعوض 1 في معادلة 2

$$v = \frac{\pi}{3} (\frac{h}{3})^2 . h$$

$$v = \frac{\pi}{3} \frac{h^2}{9} . h \ = \frac{1}{27} h^3 . \pi$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{27} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

("أحياني"2/2023)

$$\frac{1}{9} h^2 \frac{dh}{dt} . \pi$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{9} (144) \frac{dh}{dt} . \pi \ = 16\pi \frac{dh}{dt}$$

$$4 = 16\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة الرابعة :- اذا وجد في السؤال دالة ونقطتين

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :

Let M= (x ,y) , N=$(0, , \frac{3}{2})$, S=M N طول

$$s = \sqrt{(X-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \quad , y = x^2 \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

(2/2012)

$$= \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

(2/2018)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt}$$

("احيائي"1/2020)

$$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \frac{dx}{dt}$$

$$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3 \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$4\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right) = 9y^2 - 18y + 9$$

$$\rightarrow [4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9]$$

$$5y^2 - 10y = 0$$

$$\rightarrow 5y(y-2) = 0$$

$y = 0 \rightarrow x = 0$ يهمل

$OR\ y = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$M = \{(\sqrt{2} , 2), (-\sqrt{2} , 2)\}$ مجموعة الحل

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7 , 0) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4

sol :

Let M= (x ,y) , N=(7,0) , S=M N طول

$$s = \sqrt{(X-7)^2 + (y-0)^2}$$

$$\rightarrow s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2} \quad , y^2 = 4x \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

(3/2016) (1/2017)

$$= \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \frac{dx}{dt}$$

("تكميلي"3/2023)

$$\rightarrow 0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(2/2019)

$$0.2 = -\frac{2}{10} \frac{dx}{dt}$$

("خارج القطر"1/2013)

$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$ المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $x^2 = 4y$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (0 ,7) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M عندما يكون $y = 4$

sol :

لتكن M (x ,y) بعدها عن (0,7) هو s

$$s = \sqrt{(X-0)^2 + (y-7)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \quad , x^2 = 4y \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{4y + y^2 - 14y + 49}$$

("تمهيدي"/2016)

$$= \sqrt{y^2 - 10y + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2y-10)}{2\sqrt{y^2 - 10y + 49}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow 0.2 = \frac{2y-10}{2\sqrt{y^2 - 10y + 49}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{8-10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{-2}{2\sqrt{25}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -1\ unit/s$$

شبكة المساعد @SadsHelp

س لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :

Let M= (x ,y) , N=$(0, , \frac{3}{2})$, S=M N طول

$$s = \sqrt{(X-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \quad , y = x^2 \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt}$$

(1/2014)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

$$\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$y^2 - 2y + \frac{9}{4} = 9y^2 - 18y + 9$$

$$\rightarrow 8y^2 - 16y + 9 - \frac{9}{4} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots *$$

$$\left[8y^2 - 16y + \frac{27}{4} = 0\right] . 4$$

$$32y^2 - 64y + 27 - 0$$

$$[32y^2 - 64y + 27 = 0] \div 32$$

$$y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0$$

$$y^2 - 2y - 1 = 1 - \frac{27}{32}$$

$$\rightarrow (1-y)^2 = \frac{5}{32}$$

$$\rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} \quad \rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$y = x^2 \rightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$$

ملاحظة/
1-اذا وصل الطالب للخطوة * يعطى درجة كاملة.
2- اما اذا حل الطالب على انه $\frac{2}{3}$ بدل $\frac{1}{3}$ والحل صحيح يعطى درجة كاملة.

الحالة الخامسة :- اذا وجد في السؤال دالة ضمني

س جد نقطة او اكثر تنتمي الى الدائرة $x^2 + y^2 - 4x = 4$ عندها يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً الى معدل تغير y بالنسبة للزمن.

sol :

let M(x ,y) ; $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$x^2 + y^2 - 4x = 4$

(1/1996)

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = -2y\frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow (2x-4)\frac{dx}{dt} = (-2y)\frac{dy}{dt}$$

$$\because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow [(2x-4) = (-2y)] \div 2$$

$$\rightarrow x - 2 = -y \quad \rightarrow y = 2 - x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في معادلة (2)

$$x^2 + (2-x)^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$\rightarrow 2x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

اما $x = 4 \rightarrow y = 2 - 4 = -2$

$$M = \{(0 , 2), (4 , -2)\}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد مجموعة النقط التي تنتمي الى الدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

sol :

Let M= (x ,y) , $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt} = 8\frac{dy}{dt} - 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow (2x+4)\frac{dx}{dt} = (8-2y)\frac{dy}{dt}$$

("أسئلة النازحين"1/2014)

$$\because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow [(2x+4) = (8-2y)] \div 2$$

(3/2018)

$$\rightarrow x + 2 = 4 - y$$

$$\rightarrow y = 2 - x \ldots\ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2 + (2-x)^2 + 4x - 8(2-x) - 108 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 120 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \rightarrow (x+10)(x-6) = 0$$

$$x = -10$$

("تمهيدي""تطبيقي"/2019)

$$\rightarrow y = 2 + 10 = 12$$

النقطة $(-1 , 4)$

OR $x = 6 \rightarrow y = 2 - 6 = -4$

("تطبيقي"3/2023)

$M = \{(-10 , 12), (6 , -4)\}$

النقطة $(7 , -4)$

س جد مجموعة النقاط التي تنتمي للدائرة التي معادلتها $(x-3)^2 + y^2 = 32$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x مساويا الى المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن (t)

sol :

$$(x-3)^2 + y^2 = 32$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 32$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 32 - 9$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 23 \ldots\ldots (1)$$

$$2x\frac{dx}{dt} - 6x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

("احياني"2/2022)

$$\because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore 2x\frac{dx}{dt} - 6x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(2x - 6 + 2y) = 0$$

$\because \frac{dx}{dt} \neq 0$ لان النقطة متحركة

$$[2x - 6 + 2y = 0] \div 2 \ldots\ldots (2)$$

$$x - 3 + y = 0 \Rightarrow x + y = 3$$

$$y = 3 - x \ldots\ldots (3)$$

بتعويض معادلة (3) في (1) ينتج

$$x^2 - 6x + (3-x)^2 = 23$$

$$x^2 - 6x + 9 - 6x + x^2 - 23 = 0$$

$$2x^2 - 12x - 14 = 0 \,] \div 2$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0$$

اما $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$\Rightarrow y = 3 - x$$

$$\Rightarrow y = 3 + 1$$

$$\therefore y = 4$$

النقطة $(-1 , 4)$

او $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

$$y = 3 - 7$$

$$\therefore y = -4$$

النقطة $(7 , -4)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة السادسة :- اذا وجد من الرسم مثلثات متداخلة فان التشابه هو العلاقة

س قطار ذو عربة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت شجرة ارتفاعها $3m$ عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ توقف نتيجة وجود عمل ارهابي على السكة احسب سرعه تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة؟

sol :

في المثلث abc القائم الزاوية في c نفرض ان $y = ab$ والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث ان bc يمثل الشجرة و cd اقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة.

$$y^2 = z^2 + 9$$

$$y = 3\sqrt{3}$$

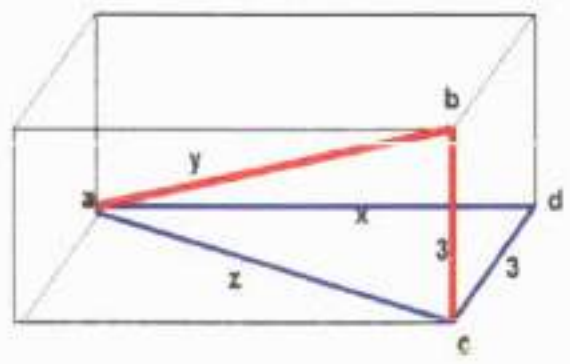
$$\rightarrow 27 = z^2 + 9$$

$$\rightarrow z^2 = 18 \rightarrow z = 3\sqrt{2}$$

$$2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt} \ldots\ldots\ldots (1)$$

("تمهيدي"/2010)



المثلث abc القائم الزاوية في d نفرض ان $ad = x, ac = z$

$$z^2 = x^2 + 9$$

$$\rightarrow 18 = x^2 + 9$$

$$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في معادلة (2)

$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow 3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3(30)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = 30\sqrt{3}\ m/s$$

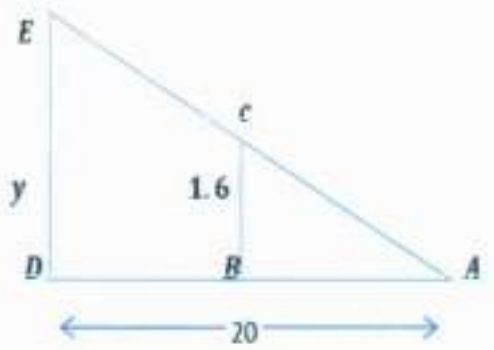
س مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد $(20\ m)$ عن حائط,تسير حادلة تبليط ارتفاعها $(1.6\ m)$, باتجاه الحائط بسرعة $(2.5\ m/min)$ ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تبعد $(8\ m)$ عن الحائط؟ وهل الارتفاع للظل يزداد ام يتناقص؟

sol :

نفرض بعد الحادلة عن الحائط في اي لحظة $= X$,

نفرض ظل الحادلة $y =$, $\frac{dy}{dt} = 2.5$

من تشابة المثلثين ADE , ABC



$$\frac{20-x}{20} = \frac{1.6}{y}$$

$$\rightarrow y = \frac{32}{20-x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(20-x)(0) - 32(\frac{-dx}{dt})}{(20-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{32(\frac{dx}{dt})}{(20-x)^2}$$

("خارج القطر"2/2017)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{32(-2.5)}{(20-8)^2}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-80}{144}$$

$$= \frac{-5}{9} m/min$$ ∴ارتفاع الظل يتناقص

ملاحظة/1)الرسم مهم جدا درجته تكون 2 درجة

2) اذا حل الطالب على سؤال الكتاب ظل الرجل يعطى الطالب صفر.

شبكة المساعد
@SadsHelp

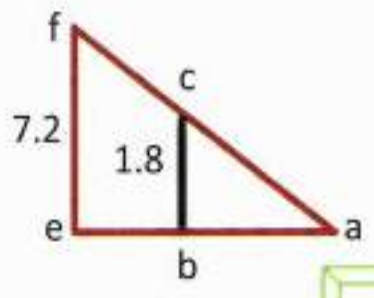
س عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = X ,

نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

من تشابه المثلثين abc , aef



$$\frac{1.8}{7.2}=\frac{y}{x+y}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{y}{x+y}$$

$$x+y=4y \rightarrow x=3y$$

$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt}=\left(\frac{30}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=10\ m/min$$

(1/2013)

(1/2015)

("تمهيدي"/2012)

("تمهيدي"/2015)

("تمهيدي"خارج القطر"/2014)

("أحيائي"/2023 2)

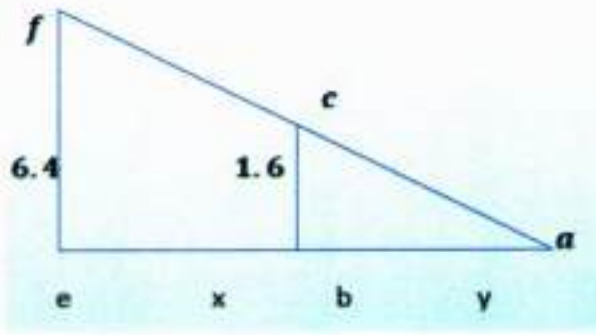
س مصباح على ارتفاع 6.4 m متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طولة 1.6 m يتحرك مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد سرعة تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض بعد الرجل عن العمود = X ,

نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$$tan\theta=\frac{1.6}{y}=\frac{6.4}{x+}$$



$$\rightarrow \frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$$

$$4y=x+y$$

$$\rightarrow 3y=x$$

$$3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30\ ]\div 3$$

$$\frac{dy}{dt}=10\ m/min$$

(2/2015)

ملاحظة/ 1- الرسم والفرضيات مهمة جداً في حال لم يرسم الطالب ولم يكتب الفرضيات تخصم منه 3 درجات

2- يمكن حل السؤال من تشابه المثلثين abc , aef

س عمود طوله 3.6 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.6m مبتعداً عن العمود وبسرعة $1.5\ m/s$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

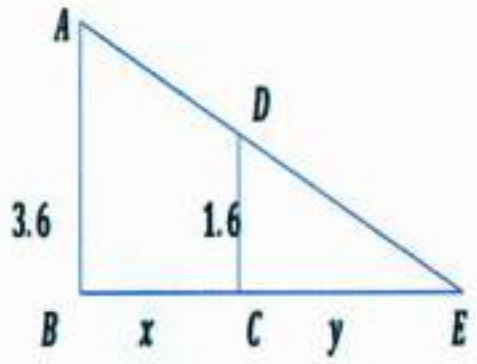
نفرض بعد الرجل عن العمود = X ,

نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$DC=1.6\ ,AB=3.6$

$BC=x\ .CE=y$

$\frac{dx}{dt}=1.5,\quad \frac{dy}{dt}=?$



في Δ ABE

$$tan\theta=\frac{AB}{BE}=\frac{DC}{CE}$$

$$\frac{3.6}{x+y}=\frac{1.6}{y}$$

$$\frac{9}{x+y}=\frac{4}{y}$$

$$9y=4x+4y$$

$$\rightarrow 5y=4x$$

$$5\frac{dy}{dt}=4\frac{dx}{dt}$$

$$5\frac{dy}{dt}=4(1.5)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{6}{5}m/s$$

("تمهيدي"/2019)

ملاحظة/ يمكن ان يستخدم الطالب تشابة المثلثات

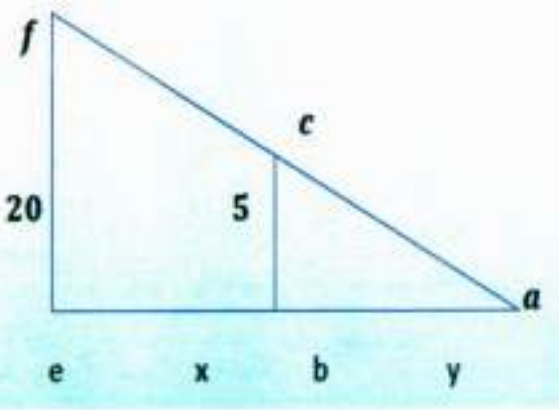
س فنار ارتفاعه 20 m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5 m مبتعداً عن الفنار بسرعة $50\ km/h$ جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر.

sol :

نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = X

نفرض ان طول ظل السفينة = y

من تشابه المثلثين abc , aef



$$\frac{5}{20}=\frac{y}{x+y}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{y}{x+y}$$

$$x+y=4y$$

$$\rightarrow x=3y$$

$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow 50=3\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{50}{3}km/h$$

("خارج القطر"/2016 2)

شبكة المساعد
@SadsHelp

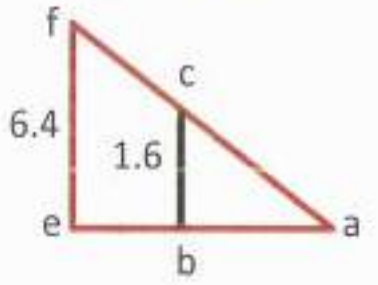
س عمود طوله 6.4 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.6 m مبتعداً عن العمود وبسرعة $27\ m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = X ,

نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

من تشابه المثلثين abc , aef



$$\frac{1.6}{6.4} = \frac{y}{x+y}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$

$$x + y = 4y \rightarrow x = 3y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(\frac{27}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 9\ m/min$$

("محاولات تطبيقي"1/2024)

شبكة المساعد
@SadsHelp

2 الأسئلة الوزارية حول مبرهنة رول

س بيّن ان الدالة $F(x) = (x-1)^4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1,3]$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 3] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 3) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$F(a)= F(-1)= (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$

$F(b)= F(3)= (3-1)^4 = (2)^4 = 16$

$\therefore F(-1)=F(3)=16$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$F'(x)= 4(x-1)^3(1) = 4(x-1)^3$

$\Rightarrow F'(c) = 4(c-1)^3$

$\Rightarrow F'(c) = 0$

$0 = 4(c-1)^3) \div 4 \Rightarrow (c-1)^3 = 0$

$\Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1,3)$

(1/2011)

س باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $F(x) = x^4 + 2x^2$ حيث $x \in [-2,2]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-2, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-2, 2) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(-2) = 16 + 8 = 24$

$f(2) = 16 + 8 = 24$

$\rightarrow f(-2) = f(2)$

$f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(c) = 0$

$\rightarrow 4c^3 + 4c = 0$

$\rightarrow 4c(c^2+1) = 0$

$\rightarrow 4c = 0$

$\rightarrow c = 0 \in (-2,2)$

or $c^2 + 1 = 0$ وهذا غير ممكن لانه مجموع مربعين

(2/2013)

س برهن ان: $F(x) = 2x + \frac{2}{x}$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد قيمة c

sol :

$x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ولكون الفترة الدالة مستمرة في الفترة والدالة كسرية

الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ نفس السبب اعلاه

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 = 5$

$f(2) = 2(2) + \frac{2}{2}$

$f(2) = 4 + 1 = 5$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$

تحقق مبرهنة رول.∴

("1/2012 "خارج القطر)

$f'(x) = 2 - 2x^{-2}$

$f'(c) = 2 - \frac{c}{c^2}$

$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \,] . c^2$

$2c^2 - 2 = 0 \,] \div 2$

$c^2 - 1 = 0$

$c^2 = 1$

$c = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ تحقق

$c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ تهمل

شبكة المساعد
@SadsHelp

س ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$F(x)= 9x + 3x^2 - x^3$ حيث $x \in [-1, 1]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

(1/2013"خارج القطر")

$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11$

$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$\because f(x) \neq f(-1)$

نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث ←

س $F(x)= ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فاذا كانت $c = 2 , c \in (-1, b)$ فجد قيمتي $a, b \in R$

sol :

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان $f(-1) = f(b)$

$f(-1) = a + 4 + 5 = a + 9$

$f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$ab^2 - 4b + 5 = a + 9 \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 2ax - 4$

$\rightarrow f'(c) = 0$

$\rightarrow 2ac - 4 = 0$

(1/2014"خارج القطر")

$\rightarrow 4a - 4 = 0$

$\rightarrow a = 1$ نعوض في (1)

$b^2 - 4b + 5 = 1 + 9$

$\rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$

$\rightarrow (b - 5)(b + 1) = 0$

either $b = 5$ OR $b = -1$ تهمل

س بيّن ان الدالة $h(x)= x^3 - x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1, 1]$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$h(a)= h(-1)= (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$h(b)= h(1)= (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

$\therefore h(-1) = h(1) = 0$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$\Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 1$

(2/2014)

$h'(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0$

(2/2016"خارج القطر")

$\Rightarrow 3c^2 = 1$

(2020/"تمهيدي"احياني")

$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$

س برهن ان الدالة $f(x) = x^3 - 1$ على الفترة $[-1, 1]$ تحقق مبرهنة رول. ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

(2/2017"خارج القطر")

الشرط الثالث/

$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - 1 = -1 - 1 = -2$

$f(b) = f(1) = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\because f(a) \neq f(b)$

∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول لا يوجد قيمة C

شبكة المساعد
@SadsHelp

س هل ان $f(x)$ تحقق مبرهنة رول؟ وإن حققتها جد قيمة c ؟
حيث $f(x)= x^2 - 4x + 5,\ x \in [-1,5]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 5] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 5) لانها كثيرة الحدود.

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 10$$
$$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 10$$

الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول

$$f'(x) = 2x - 4$$
$$f'(c) = 2c - 4$$
$$f'(c) = 0$$
$$4c - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow c = 1 \in (-1,5)$$

(3/2017"أسئلة الموصل")

س اذا كانت $f(x) = ax^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0\ ,K]$ وان $f(-1) = 11$
جد $a, K \in R$, ثم جد (c) على تلك الفترة .

sol :

$$f(x) = ax^2 - 6x + 4 \qquad [0\ ,k\ ]$$
$$f(-1) = 11$$

جد $a\ ,k \in R$

$$11 = a(-1)^2 - 6(-1) + 4$$

ثم جد (c) على الفترة

$$11 = a + 6 + 4$$
$$= 11 - 10$$
$$a = 1$$
$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$
$$f(0) = f(k) \quad \text{تحقق مبرهنة رول}$$
$$f(0) = 4 \qquad f(k) = k^2 - 6k + 4$$
$$4 = k^2 - 6k + 4$$
$$k^2 - 6k = 0$$
$$k(k-6) = 0$$
$$k = 0$$
$$k = +6 \quad [0\ ,+6]$$
$$\exists\ c \in [0\ ,6]$$
$$f\backslash(c) = 0 \quad \text{لان تحقق مبرهنة رول}$$
$$f\backslash(x) = 2x - 6$$
$$f\backslash(c) = 2c - 6 = 0$$
$$c = 3$$

(1/2019"خارج القطر "تطبيقي")

س ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c
حيث $F(x)= 9x + 3x^2 - x^3$ $x \in [-1,1]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11$$
$$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$$
$$\because f(x) \neq f(-1)$$

نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث ←

(1/2013"خارج القطر")

س بين هل الدالة $f(x) = (2-x)^2$ $x \in [0\ ,4]$
تحقق مبرهنة رول ؟ ثم جد قيمة c الممكنة

sol :

1. الدالة f مستمرة على الفترة $[0\ ,4]$ لانها كثيرة الحدود
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $(0\ ,4)$ لانها كثيرة الحدود
3.

$$f(0) = (2-0)^2 = 2^2 = 4$$
$$f(x) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$$
$$\therefore f(0) = f(4)$$

(1/2020)

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

∴ توجد $c \in (0\ ,4)$ بحيث $f'(c) = 0$

$$f'(x) = 2(2-x)(-1)$$
$$f'(c) = -2(2-c)$$
$$f'(c) = 0 \Rightarrow -2(2-c) = 0] \div (-2)$$
$$2 - c = 0 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س بين هل ان الدالة $f(x) = x^3 - 9x\ ,\ x \in [-3\ ,3]$ تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

sol :

$f(x) = x^3 - 9x\ \ ,x \in [-3\ ,3]$

1. الدالة مستمرة على الفترة $[-3\ ,3]$ لانها كثيرة الحدود
2. الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\ ,3)$ لانها كثيرة الحدود

$$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3)$$
$$= -27 + 27 = 0$$
$$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3)$$
$$= 27 - 27 = 0$$

(2/2020)

$\because f(a) = f(b)$

∴ الدالة المعطاة تحقق شروط مبرهنة رول

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \ \rightarrow\ f'(c) = 3c^2 - 9$$
$$3c^2 - 9 = 0\ ] \div 3 \ \Rightarrow\ c^2 - 3 = 0$$
$$(c - \sqrt{3})\,(c + \sqrt{3}) = 0$$

(1/2020"تطبيقي")

أما $c = \sqrt{3} \in (-3\ ,3)$

(2023/تمهيدي"أحياني")

أو $c = -\sqrt{3} \in (-3, 3)$

س بين ان الدالة تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ثم جد قيمة C الممكنة :

$x \in [-1\ ,1\ ]$ حيث $f(x) = (x^2 - 3)^2$

sol :

1. الدالة مستمرة على الفترة [-1,1] لانها متعددة الحدود
2. الدالة قابلة للاشتقاق على الفتره (-1,1) لانها متعددة الحدود

$$f(a) = f(-1) = [(-1)^2 - 3]^2 = (-2)^2 = 4$$
$$f(b) = f(1) = [(1)^2 - 3]^2 = (-2)^2 = 4$$
$$\therefore f(-1) = f(1)$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

اذن توجد $c \in (-1,1)$ حيث $f'(c) = 0$

$$f'(x) = 2\,(x^2 - 3).\,2x$$
$$f'(c) = 4c\,(c^2 - 3)$$

(2022/"تمهيدي"احياني")

$$0 = 4\,c\,(c^2 - 3\,) \quad] \div 4$$

اما $c = 0 \quad \in (-1\ ,1)$

او $c^2 = 3$

$$\rightarrow c = \mp\sqrt{3} \notin (-1\ ,1\,)$$

س ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية:

$f(x) = \cos 2x + 2\cos x\ , x \in [0, 2\pi]$

ثم جد قيمة c الممكنة.

sol :

1. الدالة مستمرة على الفترة $[0, 2\pi]$
2. الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 2\pi)$
3.

$$f(a) = f(0) = \cos 2(0) + 2\cos 0$$
$$= \cos 0 + 2\cos 0$$
$$= 1 + 2(1)$$
$$= 3$$
$$f(b) = f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi$$
$$= \cos 2\pi + 2\cos 2\pi$$
$$= 1 + 2(1)$$
$$= 3$$

(2/2024)

(2/2021"احياني")

$\therefore f(a) = f(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة $[0, 2\pi]$

∴ يوجد $c \in (0, 2\pi)$ وان $f'(c) = 0$

$$f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x$$
$$f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c$$
$$-2\sin 2c - 2\sin c = 0\ ] \div (-2)$$
$$\sin 2c + \sin c = 0$$
$$2\sin c\cos c + \sin c = 0$$
$$\sin c\,(2\cos c + 1) = 0$$

اما $\sin c = 0 \implies c = 0 \notin (0, 2\pi)$

$$c = \pi \in (0, 2\pi)$$
$$c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$$

او $2\cos c + 1 = 0 \implies 2\cos c = -1$

$$\cos c = \frac{-1}{2}$$

$$c = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{3} \implies c = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi) \\ \pi + \frac{\pi}{3} \implies c = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كانت $f(x) = 2x + \frac{h}{k}$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[\frac{1}{2}, K]$ ، فاذا كانت $C = 1$ تنتمي للفترة $(\frac{1}{2}, k)$ ، جد $h, k \in R$

sol :

$$f(x) = 2x + \frac{h}{x}$$

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول على $[0, k]$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f(x) \ , \quad f'(1) = 0$$

جد $a, k \in R$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{h}{\frac{1}{2}} = 2k + \frac{h}{k}$$

$$1 + 2h = 2k + \frac{h}{k} \ldots\ldots\ldots (1$$

بما ان $c = 1$

$$\therefore f'(1) = 0$$

("احيائي"1/2023)

$$f'(x) = 2 - \frac{h}{x^2}$$

$$f'(1) = 2 - h = 0 \ \rightarrow h = 2$$

بالتعويض في 1)

$$\therefore 1 + 2(2) = 2k + \frac{2}{k}$$

$$5 = 2k + \frac{2}{k} \quad \rightarrow 5 = 2k^2 + 2$$

$$2k^2 - 5x + 2 = 0$$

اما $2k - 1 = 0 \ \rightarrow \ 2k = 1$

$\therefore k = \frac{1}{2}$ تهمل

أو $k - 2 = 0 \ \rightarrow k = 2$

س باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $F(x) = x^4 - 2x^2$ حيث $x \in [-2, 2]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-2, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-2, 2) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

("محاولات"1/2024)

$$f(-2) = 16 - 8 = 8$$

$$f(2) = 16 - 8 = 8$$

$$\rightarrow f(-2) = f(2)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(c) = 0$$

$$\rightarrow 4c^3 - 4c = 0$$

$$\rightarrow 4c(c^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow 4c = 0$$

$$\rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$$

or $c^2 - 1 = 0 \ \rightarrow c = \pm 1 \ \in (-2, 2)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

3 الأسئلة الوزارية حول " مبرهنة القيمة المتوسطة "

س اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $F(x)=x^2-x+1$ على الفترة $[-1,2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ يتحقق الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ يتحقق الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$$F'(x)=2x-1 \Rightarrow F'(c)=2c-1$$

ميل الوتر $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(2)-F(-1)}{2-(-1)}=\frac{(3)-(3)}{2+1}=\frac{0}{3}=0$

ميل المماس = ميل الوتر

$$2c-1=0$$
$$\Rightarrow 2c-1=0$$
$$\Rightarrow 2c=1$$
$$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(-1,2)$$

(1/2012)

س اذا كانت $f:[0,b]\to R \quad f(x)=x^3-4x^2$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة b

sol :

ميل المماس/

$$F'(x)=3x^2-4x$$
$$\Rightarrow F'(c)=3c^2-4c$$
$$\Rightarrow F'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=\frac{-12}{3}=-4$$

ميل الوتر $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(b)-F(0)}{b-0}=\frac{b^3-4b^2-0}{b}=b^2-4b$

ميل المماس = ميل الوتر

$$\therefore b^2-4b=-4$$
$$\to b^2-4b+4=0$$
$$\to (b-2)^2=0$$
$$\to b=2$$

(1/2016)

("تمهيدي"/2017)

(1/2018)

("تمهيدي"/2014 خارج القطر)

س برهن ان الدالة $f(x)=x^2-6x+4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة C على [-1,7]

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 7] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 7) لانها كثيرة الحدود.

(1/2015) (1/2014)

ميل المماس/

$$f'(x)=2x-6 \to f'(c)=2c-6$$

ميل الوتر $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(7)-F(-1)}{7+1}=\frac{11-11}{8}=\frac{0}{8}=0$

ميل المماس = ميل الوتر

$$0=2c-6=0$$
$$\Rightarrow c=3\in(-1,7)$$

("تطبيقي"2/2019)

("تطبيقي"3/2019)

س اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $h(x)=x^2-4x+5$ على الفترة $[-1,5]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 5] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 5) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$$h'(x)=2x-4 \Rightarrow h'(c)=2c-4$$

ميل المماس

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{h(5)-F(-1)}{5-(-1)}$$
$$=\frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{5+1}$$
$$=\frac{10-10}{6}=\frac{0}{6}=0$$

ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$$2c-4=0$$
$$\Rightarrow 2c=4$$
$$\Rightarrow c=2\in(-1,5)$$

("أسئلة النازحين"4/2014)

شبكة المساعد @SadsHelp

س اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2-4x+5$ على الفترة $[-1,2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$f'(x)=2x-4$

$\Rightarrow f'(c)=2c-4$ ميل المماس

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{1-10}{2-(-1)}=\frac{-9}{3}=3$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c-4=-3$

$\Rightarrow 2c=-3+4$

$\Rightarrow 2c=1$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(-1,2)$

(3/2016 "خارج القطر")

س اذا كانت $f:[0,n]\to R \quad f(x)=x^2-2x$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=5$ فجد قيمة n

sol :

$F'(x)=2x-2$

$\Rightarrow F'(c)=2c-2$

$f'(5)=2(5)-2=10-2=8$ ميل المماس

∴ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ⇐ ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(n)-F(0)}{n-0}$

$=\frac{n^2-2n-0}{n}=\frac{n(n-2)}{n}=n-2$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\therefore n-2=8$

$\Rightarrow n=10$

(3/2017)

س اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة للدالة وان تحققت جد قيم c الممكنة حيث

$$f(x)=\frac{4}{x+2}\ ,\ x\in[-1,2]$$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لان $-2\notin[-1,2]$

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لان $-2\notin[-1,2]$

∴ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$f(x)=\frac{4}{x+2}$

$f(-1)=\frac{4}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$

$f(2)=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$

$f(x)=4(x+2)^{-1}$

$f'(x)=4(x+2)^{-2}(1)$

$\to f'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}$

$f'(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

ميل المماس = ميل الوتر

$f'(c)=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$

$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{1-4}{2+1}$

$\to\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{-3}{3}$

$\frac{-4}{(c+2)^2}=-1$

$\to (c+2)^2=4$ بجذر الطرفين

$C+2=\pm 2$

اما $C+2=2\ \to C=0\ \in[-1,2]$

او $C+2=-2\ \to C=-4\ \notin[-1,2]$

(2018/"تمهيدي")

شبكة المساعد @SadsHelp

س اختبر تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة
$f(x) = x^3 - x - 1$ على الفترة $[-1, 2]$ ،
وان تحققت جد قيمة C

sol :

$f(x) = x^3 - x - 1$

1. الدالة مستمرة على $[-1, 2]$ لانها كثيرة الحدود
2. الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 2)$ لانها كثيرة الحدود

∴ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

اذن توجد $C \in (-1, 2)$ حيث عندما ميل المماس = ميل الوتر

اي ان

$f'(c) =$ ميل المماس

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(c) = 3C^2 - 1$ ميل المماس

$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ميل الوتر

(2021/"تمهيدي "احيائي")

$m = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{5-(-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

∴ $f'(c) =$ ميل الوتر

$3C^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3C^2 = 3$

$C^2 = 1 \Rightarrow C = \mp 1$

$\therefore C = 1 \in (-1, 2)$, $C = -1 \notin (-1, 2)$

س ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة
$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $x \in [-2, 7]$

sol :

$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{\frac{2}{3}}$ $[2, 7]$

1) الدالة مستمرة على الفترة $[-2, 7]$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} . 1$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \Rightarrow x + 1 = 0$ ("2/2021"احيائي)

$x = -1$

2) غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$ حيث $-1 \in [-2, 7]$

∴ لا تحقق شروط القيمة المتوسطة

س اختبر تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة
$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ حيث $x \in [-4, 0]$
ثم جد قيم (C) الممكنة

sol :

$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $x \in [-4, 0]$

1) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25}$

$= 5 = f(0)$

2) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{9}$

$= 3 = f(-4)$

∴ الدالة مستمرة من جهة اليسار عند $x = 0$

الدالة مستمرة من جهة اليمين عند $x = -4$

3) $let\ a \in (-4, 0)$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - a^2} = f(a)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة $(-4, 0)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة $[-4, 0]$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}$

$25 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 5 \notin (-4, 0)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على $(-4, 0)$

اذن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على $[-4, 0]$

∴ يوجد $C \in (-, 4, 0)$ حيث

ميل المماس = ميل الوتر

$m_{\text{الوتر}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{5-3}{0-(-4)} = \frac{1}{2}$

$m_{\text{المماس}} = f'(c)$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-c^2}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{1}{2}$ $\because = \sqrt{25 - c^2} > 0$

$-5 < c < 0$

$\therefore -c = \frac{1}{2}\sqrt{25 - c^2}$ بتربيع الطرفين

$c^2 = \frac{1}{4}(25 - c^2)$

$4c^2 = 25 - c^2$ ("1/2021 "احيائي)

$4c^2 + c^2 = 25$

$5c^2 = 25$

$c^2 = 5 \Rightarrow c = +\sqrt{5}$ يهمل $5 < c < 0$

$\Rightarrow c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س

ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة
$h(x) = x^2 - 4x + 5$ على الفترة $[1, 5]$
وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[1, 5]$ لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1, 5)$ لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس $h'(x)=2x-4 \Rightarrow h'(c) = 2c - 4$

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(5) - F(1)}{5 - (1)}$$

$$= \frac{(25 - 20 + 5) - (1 - 4 + 5)}{5 - 1}$$

ميل الوتر $= \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

ميل المماس = ميل الوتر

$2c-4=2$

$\Rightarrow 2c = 6$

$\Rightarrow c = 3 \in (1, 5)$

(3/2023"احيائي")

شبكة المساعد
@SadsHelp

4 الأسئلة الوزارية حول "التقريب باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة "

س مربع مساحته $50\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات.

sol :

مساحة المربع $=$(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow 50=m^2 \rightarrow m=\sqrt{50}$

الدالة $m(x)=\sqrt{x}$

$b=50\ ,\ a=49$

(2/1997)

$h=b-a=50-49=1$

المشتقة $m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

نعوض في الدالة $m(a)=\sqrt{49}=7$

نعوض في المشتقة $m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{2(7)}=\frac{1}{14}=0.071$

القانون $m(a+h)\cong m(a)+h.m'(a)$

$m(50)\cong 7+(1)(0.071)$

$\cong 0.7+(0.01)(0.714)$

$\Rightarrow m(0.50)\cong 7+0.071\cong 7.071cm$

$\cong 7.071\ cm$

س مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$.

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعده المخروط (r)

$v=\frac{\pi}{3}r^2h \rightarrow 210\pi=\frac{\pi}{3}r^2(10)$

(1/1999)

الدالة $\rightarrow r^2=63 \rightarrow r=\sqrt{63}$

$b=63\ ,\ a=64,$

(2/2013)

$h=b-a=63-64=-1$

المشتقة $r'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

نعوض في المشتقة $r(a)=\sqrt{64}=8$

$r'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{64}}=\frac{1}{16}=0.0625$

$r(a+h)\simeq r(a)+h.r'(a)$

$r(63)\simeq 8+(-1).(0.0625)$

$\simeq 8-0.0625$

$\simeq 7.9375$

س لتكن $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$ جد $f(1.02)$ بصورة تقريبية

sol :

(2/1998)

الدالة $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}=(2x+6)^{\frac{1}{3}}$

(4/2014 "أسئلة النازحين")

$b=1.02\ ,\ a=1,$

$h=b-a=1.02-1=0.02$

المشتقة $F'(x)=\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$

نعوض في الدالة $F(a)=\sqrt[3]{2(1)+6}=\sqrt[3]{8}=2$

نعوض في المشتقة $F'(a)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}}=\frac{2}{3(4)}=\frac{1}{6}=0.16$

القانون $F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$

$F(1.02)\cong F(2)+hF'(0.02\ .\ 0.16)$

$\cong 2+(0.0032)\cong 2.0032$

س مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من $4cm$ الى $4.01cm$ باستخدام مفهوم التفاضلات.

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعده المخروط (r) والارتفاع y

حيث ان $y=r$

$v=\frac{\pi}{3}r^2y$

(1/2000)

$\rightarrow v=\frac{\pi}{3}y^2y$

الدالة $\rightarrow v_{(y)}=\frac{\pi}{3}r^3$

$b=4.01\ ,\ a=4,$

$h=b-a=4.01-4=0.01$

المشتقة $v'_{(y)}=\pi y^2$

$v'_{(a)}=\pi a^2$

نعوض في المشتقة $=\pi(4)^2=16\pi$

$h.v'(a)\simeq (16\pi)(0.01)$

القيمة التقريبية لتغير الحجم $\simeq 0.16\pi cm^3$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

(2/2001)

$b=126\ ,\ a=125,$

$h = b - a = 126 - 125 = 1$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{125} = 5$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(126) \cong 5 + (0.013)\ (1)$

$\cong 5.013$

س لتكن $f(x) = \sqrt{4x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt{4x+5}$

(2/2002)

$b = 1.001\ ,\ a = 1,$

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

المشتقة $F'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt{4(1)+5} = \sqrt{9} = 3$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{2}{\sqrt{4a+5}} = \frac{2}{\sqrt{4+5}} = \frac{2}{3} = 0.6$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(1.001) \cong 3 + (0.001)\ (0.6)$

$\cong 3.0006$

س جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt{99}$

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

(1/2003)

$b = 99\ ,\ a = 100,$

$h = b - a$

$= 99 - 100 = -1$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt{100} = 10$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(99) \cong 10 + (-1)\ (0.05) \cong 9.95$

س لتكن $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{3x+5} = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$

(1/2004)

$b = 1.001\ ,\ a = 1,$

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{\frac{-2}{3}}(3) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{3(1)+5} = \sqrt[3]{8} = 2$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3a+5)^2}} = \frac{1}{4} = 0.25$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(1.001) \cong 2 + (0.00025) \cong 2.0025$

س باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها $2.99\ cm$ بصورة تقريبية.

sol :

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^2

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \rightarrow v = \frac{4\pi}{3}(2.99)^3$

(1/2005)

$b = 2.99,\ a = 3\ ,$

$h = b - a = 2.99 - 3 = -0.01$

المشتقة $v'(x) = 4\pi x^2$

نعوض في الدالة $v(a) = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$

نعوض في المشتقة $v'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$

القانون $v(a+h) \cong v(a) + hv'(a)$

$F(1.001) \cong 36\pi + (-0.01)(36\pi)$

$\cong 35.64\pi\ cm^3$

س لتكن $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt{3x+1}$

(2/2005)

$b = 1.001\ ,\ a = 1,$

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

المشتقة $F'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(1.001) \cong 2 + (0.001)\ (0.75)$

$\cong 2.00075$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد حجم كرة طول نصف قطرها $3.001\ cm$ بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات.

sol :

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

(2/2016 "تمهيدي")

$v = \frac{4\pi}{3}(3.001)^3$

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

(2/2016)

$b=3.001,\quad a=3\ ,$

$h = b - a = 3.001 - 3 = -0.001$

$v'(x)=4\pi x^2$ المشتقة

$v(a)=\frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a)=4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h) \cong v(a) + h.v'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 36\pi + (0.001)(36\pi) \cong 36.036\pi\ cm^3$

س جد بصورة تقريبية وباستخدام مفهوم التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

sol :

مساحة المربع $=$(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow 101=m^2 \rightarrow m=\sqrt{101}$

$m(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b=101\ ,\ a=100$

$h = b - a = 101 - 100 = 1$

(1/2007)

$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)=\sqrt{100} = 10$ نعوض في الدالة

$m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2(10)} = \frac{1}{20} = 0.05$ نعوض في المشتقة

$m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

$m(101) \cong 10 + (1)(0.05)$

$\cong 10 + 0.05$

$\cong 10.05\ cm$

س جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{0.98}$

sol: $f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

(1/2008)

$b = 0.98\ ,\ a = 1,$

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{1} = 1$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(0.98) \cong 1 + (-0.02)\ (0.5)$

$\cong 1 - 0.1$

$\cong 0.99$

س باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

sol :

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = -9\ ,\ a = -8,$

(2/2006)

$h = b - a = -9 + 8 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[3]{-8} = -2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}}$ نعوض في المشتقة

$= \frac{1}{12} = 0.083$

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(-9) \cong -3 + (0.083)\ (-1)$

$\cong -2 - 0.083$

$\cong -2.083$

س جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{143}$

sol :

$f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

(2008 "تمهيدي")

$b=143\ ,\ a=144,$

$h = b - a = 143 - 144 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{144} = 12$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} = 0.04$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(143) \cong 12 + (-1)\ (0.04)$

$\cong 11.96$

س جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{13.86}$

sol:

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

(2/2008 "خارج القطر")

$b = 13.86\ ,\ a = 16,$

$h = b - a = 13.86 - 16 = -2.14$

$F'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[4]{16} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} = 0.031$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(13.86) \cong 2 + (-2.14)\ (0.031)$

$\cong 2 - 0.0663 \cong 1.9347$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$

sol:

الدالة $f(x) = \sqrt{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$b = 15\ ,\ a = 16\ ,\ h = b - a = 15 - 16 = -1$

المشتقة $F'(x) = = -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{16^3}} = \frac{-1}{128} = -0.007$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(15) \cong 0.25 + (-1)(-0.007)$

$\cong 0.25 + (0.007) \cong 0.257$

("تمهيدي"/2009)

س جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{0.008}$

sol:

(1/2009)

الدالة $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

$b = 0.0080\ ,\ a = 0.0081,$

$h = b - a = 0.0080 - 0.0081 = -0.0001$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}} = \frac{1}{0.108} = 9$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(0.008) \cong 0.3 + (-0.0001)(9)$

$\cong 0.3 + (-0.0009) \cong 0.2991$

س جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

sol:

("خارج القطر"1/2011)

الدالة $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$b = 9\ ,\ a = 8,\ \ h = b - a = 9 - 8 = 1$

المشتقة $F(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

نعوض في الدالة $F(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$

("تمهيدي"/2014)

$F'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2^4}} = -\frac{1}{3(16)}$

نعوض في المشتقة $= -\frac{1}{48} = -0.0208$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

(التعويض في القانون) $F(9) \cong F(8) + hF'(8)$

$\Rightarrow F(9) \cong 0.5 + (1)(-0.0208) \cong 0.5 - 0.0208$

$\Rightarrow F(9) \cong 0.4792$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cong 0.792$

س جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt[3]{26}$

Sol:

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b=26\ ,\ a=27,\ \ h=b-a = 26-27 = -1$

(2/2008)

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

("تمهيدي"/2016)

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{27} = 3$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(26) \cong 3 + (0.037)(-1) \cong 3 - 0.037 \cong 2.963$

س مكعب حجمه $124\ cm^3$ جد وباستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه.

sol: حجم المكعب $=$ (طول الضلع)^3

$v(m) = m^3 \rightarrow 124 = m^2 \rightarrow m = \sqrt[3]{124}$

("تمهيدي"/2010)

الدالة $m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 124\ ,\ a = 125$

$h = b - a = 124 - 125 = -1$

المشتقة $m'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة $m(a) = \sqrt[3]{125} = 5$

نعوض في المشتقة $m'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

القانون $m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$

$m(124) \cong 5 + (0.013)(-1)$

$\cong 5 - (0.013) \cong 4.987$

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.8}$

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 7.8\ ,a = 8\ ,h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(1/2011)

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(7.8) \cong 2 + (0.083)(-0.2)$

$\cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{63}$

sol:

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 63\ ,\ a = 64,\quad h = b - a = 63 - 64 = -1$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{64} = 4$

("تمهيدي"/2012)

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$

نعوض في المشتقة $= \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(63) \cong 4 + (-1)\,(0.0208)$

$\cong 4 - 0.01208 \cong 3.9792$

س جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\sqrt{\frac{1}{2}}$

sol :

(2/2024) (2/2012)

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

الدالة $F(x) = \sqrt{x}$

$b = 0.50\ ,\ a = 0.49\ ,\ h = b\text{-}a = 0.50 - 0.49 = 0.01$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

نعوض في الدالة $F(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$F'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}}$

نعوض في المشتقة $= \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.714$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(0.50) \cong F(0.49) + hF'(0.49)$

$\cong 0.7 + (0.01)(0.714)$

$\Rightarrow F(0.50) \cong 0.7 + 0.00714 \cong 0.70714$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0.70714$

س مربع مساحته $48\ cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه .

sol :

مساحة المربع $=$ (طول الضلع)^2

$A = m^2 \rightarrow 48 = m^2 \rightarrow m = \sqrt{48}$

الدالة $m(x) = \sqrt{x}$

$b = 48\ ,\ a = 49$

(1/2013)

$h = b - a = 48 - 49 = -1$

المشتقة $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

نعوض في الدالة $m(a) = \sqrt{49} = 7$

نعوض في المشتقة $m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2(7)} = \frac{1}{14} = 0.071$

القانون $m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$

$m(48) \cong 7 + (-1)(0.071)$

$\Rightarrow m(0.50) \cong 7 - 0.071 \cong 6.929\ cm$

$\cong 7.071\ cm$

س كرة نصف قطرها $(6\ cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1\ cm)$ جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

sol :

كمية الطلاء (حجم الطلاء) = حجم الكرة مع الطلاء – حجم الكرة الاصلي (بدون طلاء)

v = حجم الطلاء (كمية الطلاء)

r = نصف قطر الكرة مع الطلاء

6 = نصف قطر الكرة الاصلي

$\pi = \frac{22}{7}$ النسبة الثابتة

$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3$

$B = 6+0.1 = 6.1$

$h = b - a = 6.1 - 6 = 0.1\ \because a=6$

(1/2014)

$v'(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$

$v'(r) = v'(6) = 4\pi(6^2) = 144\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

$h\,v'(a) = h\,v'(r)$

$= h\,v'(6) = 0.1(144\pi) = 14.4\pi\ cm^3$

س باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية , علما ان طول قطر قاعدته يساوي $3.99\ cm$ وارتفاعه

sol :

حجم المخروط $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)$^2 \times$ الارتفاع

(1/2015)

$v = \frac{\pi}{3}r^2y\ ,$

$\because y = 2r$

$\rightarrow r = \frac{1}{2}y$

$\rightarrow v(y) = \frac{\pi}{12}y^3$

$b = 3.99,\quad a = 4\ ,$

$h = b - a = 3.99 - 4 = -0.01$

المشتقة $v'(x) = \frac{\pi}{4}y^2$

نعوض في الدالة $v(a) = \frac{\pi}{12}(4)^3 = \frac{64}{12}\pi = 5.33\pi$

نعوض في المشتقة $v'(a) = \frac{\pi}{4}(a)^2 = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 4\pi$

القانون $v(a+h) \cong v(a) + h.v'(a)$

$v(3.99) \cong 5.3\pi + (-0.01)(4\pi)$

$= 5.33\pi - 0.04$

$\cong 5.29\pi\ cm^3$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية

$(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

sol :

الدالة $f(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2 = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$

$b = 1.01 \ , \ a = 1,$

$h = b - a = 1.01 - 1 = 0.01$

المشتقة $F'(x) = 5x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

("1/2015 أسئلة النازحين")

نعوض في الدالة $F(a) = 1 + 3 + 2 = 6$

نعوض في المشتقة $F'(a) = 5a^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = 5 + 1 = 6$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(1.01) \cong 6 + (0.01)\ (6) \cong 6 + 0.06 \cong 6.06$

س اذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة

اذا تغيرت x من 4 الى 4.01

sol :

("2023/تمهيدي "أحيائي")

الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$

(2/2015)

$b = 4.01 \ , \ a = 4,$

$h = b - a = 4.01 - 4 = 0.01$

المشتقة $F'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{4^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{64}} = \frac{-1}{16} = -0.06$

$hF'(a) \cong (0.01).(-0.06)$

مقدار التغير التقريبي $\cong -0.0006$

س لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 125 الى 125.06

فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

sol :

("2/2015 "خارج القطر)

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$b = 125.06 \ , \ a = 125,$

$h = b - a = 125.06 - 125 = 0.06$

المشتقة $F'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{15} = 0.13$

$hF'(a) \cong (0.06).(0.13)$

مقدار التغير التقريبي $\cong 0.0078$

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.9}$

Sol:

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

(3/2015)

$b = 7.9 \ , \ a = 8,$

$h = b - a = 7.9 - 8 = -0.1$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(7.9) \cong 2 + (-0.1)\ (0.083)$

$\cong 2 - 0.0083 \cong 1.9917$

س جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

$\sqrt{80} - \sqrt[4]{80}$

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$

$b = 80 \ , \ a = 81, \quad h = b - a = 80 - 81 = -1$

المشتقة $F'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

نعوض في الدالة $F(a) = \sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{1}{2\sqrt{81}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}}$

("1/2016 "خارج القطر)

$= \frac{1}{18} - \frac{1}{108} = 0.046$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

("2/2021 "احيائي")

$F(81) \cong 6 + (-1)\ (0.046)$

$\cong 6 - 0.046 \cong 5.954$

س جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$ مستخدماً

نتيجة القيمة المتوسطة

sol :

الدالة $f(x) = x^{\frac{-1}{4}}$

$b = 15.6 \ , a = 16, h = b - a = 15.6 - 16 = -0.4$

(1/2017)

المشتقة $F'(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-5}{4}}$

نعوض في الدالة $F(a) = (16)^{\frac{-1}{4}} = (2^4)^{\frac{-1}{4}}$

$= 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

نعوض في المشتقة $F'(a) = \frac{-1}{4}(16)^{\frac{-5}{4}} = \frac{-1}{4}(2^4)^{\frac{-5}{4}}$

$F'(a) = \frac{-1}{4} * \frac{1}{32} \rightarrow F'(a) = \frac{-1}{128} \rightarrow F'(a) = -0.0078$

القانون $F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$

$F(15.6) \cong 0.5 + (-0.4)\ (-0.0078)$

$\cong 0.5 + 0.00312 \cong 0.50312$

ملاحظة/ يمكن للطالب ان يجعل الدالة على الشكل $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ويحل السؤال بنفس الطريقة

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$

sol :

الدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$

("تطبيقي"1/2023)

$b=32.06\ ,\ a=32,$

$h=b-a=32.06-32=0.06$

المشتقة $F'(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$

(2/2017)

نعوض في المشتقة $F'(32)=\frac{1}{5}\left(2^5\right)^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{80}=$

$F'(32)=0.0125$

$hF'(a)\cong(0.06).(0.0125)$

مقدار التغير التقريبي $\cong 0.0075$

س كرة نصف قطرها (8 cm) طليت بطلاء سمكه (0.1 cm) جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

sol :

$v=\frac{4}{3}\pi r^3$

$a=8\ ,b=8.1$

$h=b-a\ ,h=8.1-8=0.1$

$v'(r)=\frac{4}{3}\pi(3r^2)=4\pi r^2$

$v'(r)=v'(8)=4\pi(8^2)$

("خارج القطر"1/2017)

$\rightarrow v'(a)=256\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

حجم الطلاء $=h\,v'(a)=0.1*(256\pi)$

$=25.6\pi\ cm^3$

ملاحظة/ ممكن ان يحل الطالب حسب

حجم الطلاء = حجم الكرة مع الطلاء– حجم الكرة الاصلي

ويحل ويكون الناتج نفس الشيء فلا يحاسب الطالب.

س جد القيمة التقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة $\sqrt[3]{26}+2$

Sol:

الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x}+2=x^{\frac{1}{3}}+2$

$b=26\ ,\ a=27,$

$h=b-a=26-27=-1$

نعوض في الدالة $F(a)=\sqrt[3]{27}+2=3+2=5$

المشتقة $F'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في المشتقة $F'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}=0.037$

القانون $F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$

$F(26)\cong 5+(0.037)\,(-1)$

$\cong 5-0.037$

$\cong 4.963$

("خارج القطر"2/2018)

س جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

$\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

sol :

الدالة $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

$b=17\ ,\ a=16,$

("أسئلة الموصل"1/2017)

$h=b-a=17-16=1$

المشتقة $F'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

نعوض في الدالة $F(a)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}$

("تطبيقي "1/2019)

نعوض في المشتقة $=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$

القانون $F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$

$F(17)\cong 6+(1)\,(0.156)$

$\cong 6+0.156\cong 6.156$

س باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة,

جد تقريباً مناسباً لـ $\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$

sol:

الدالة $F(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

("خارج القطر"1/2018)

$b=28\ ,\ a=27,\quad h=b-a=28-1=1$

المشتقة $F(x)=x^{-\frac{1}{3}}\ \Rightarrow F'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

نعوض في الدالة $F(27)=\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}=0.333$

$F'(27)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{27^4}}=\frac{-1}{3(81)}$

(1/2019)

نعوض في المشتقة $=\frac{-1}{243}=-0.004$

القانون $F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$

(التعويض في القانون) $F(28)\cong F(27)+hF'(27)$

$\Rightarrow F(28)\cong 0.333+(1)(-0.004)$

$\cong 0.333-0.004$

$\Rightarrow F(28)\cong 0.329$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{28}}\cong 0.329$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها فاذا كان نصف القطر يساوي (2.97 cm) جد الحجم بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة ؟

sol :

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة $r =$

ونفرض ارتفاعل الاسطوانة $h =$

$h = r$

$b = 2.97$ Let $a = 3$

$\therefore h = b - a \Rightarrow h = 2.97 - 3 \quad \therefore h = -0.03$

$v = \pi r^2 h$

$v = \pi r^3$

$v(30) = 27\pi$

$v` = 3\pi r^2$

$v`(3) = 27\pi$

$v(2.97) \cong v(3) + hv`(3)$

$\cong 27\pi - (0.03) * 27\pi$

$\cong 27\pi - 0.81\pi$

$\cong 26.19\pi \text{ cm}^2$

(1/2019 "خارج القطر")

س مستطيل بعداه $\sqrt{143}$, $\sqrt[3]{28}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

sol :

1) نجد طول المستطيل $\sqrt{143}$

$\begin{Bmatrix} b = 143 \\ a = 144 \end{Bmatrix} \; h = -1$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = 12$

$f\backslash(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f\backslash(a) = \frac{1}{24}$

$\therefore \sqrt{143} \cong f(a) + hf\backslash(a)$

$\cong 12 - \frac{1}{24}$

$\cong 11\frac{23}{24} \cong 11.95$

(3/2019)

2) نجد عرض المستطيل $\sqrt[3]{28}$

$\begin{Bmatrix} b = 28 \\ a = 27 \end{Bmatrix} \; h = 1$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(a) = 3 \quad \Rightarrow f\backslash(a) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

$f\backslash(a) = \frac{1}{3(3)^2} = \frac{1}{27}$

$\sqrt{28} \cong f(a) + h * f\backslash(a)$

$\cong 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27} \cong 3.03$

$A = 11.95 * 3.03$

$= 36.20 \; unit^2$

س جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $(1.99\ cm)$.

sol :

المساحة السطحية = مساحة وجه واحد * 6

1) $f(x) = 6x^2$

2) لتكن $a = 2 \; , b = 1.99$

$h = b - a \quad h = 1.99 - 2 = -0.01$

3) $f(a) = 6(2)^2 = 24$

4) $f\backslash(x) = 12x$

(2/2019)

$f\backslash(a) = 12(2) = 24$

$\therefore \; f(a) \cong f(a) + h * f\backslash(a)$

$\cong 24 + (-0.01)(24)$

$\cong 24 - 0.24$

$\cong 23.76\ cm^2$

س مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، فإذا كان ارتفاعه يساوي $(2.98\ cm)$، جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

sol :

نفرض ارتفاع المخروط = y

نفرض نصف قطر المخروط = r

$r = \frac{h}{2}$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 . y \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{y}{2}\right)^2 . y$

$y = 2r \Rightarrow r = \frac{y}{2}$

(2/2020 "تطبيقي")

$V = \frac{\pi}{3} y^3$

(1/2022 "احياني")

$a = 3 \; , b = 2.98 \; ,$

$h = b - a = 2.98 - 3 = -0.02$

$V(a) = \frac{\pi}{4}(3)^3$

(2/2023 "تطبيقي")

$= \frac{\pi}{12} . 27 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$

$V' = \frac{\pi}{4} y^2$

$V'(3) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$

$V(a + h) \cong V(a) + hV'(a)$

$\cong 2.25\pi + (-0.02)(2.25\pi)$

$\cong 2.25\pi - 0.045\pi$

$= 2.205\ \pi\ cm^3$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من (8) الى (8.06) ما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

sol :

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$a = 8 , b = 8.06$

$h = b - a = 0.06$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3 x^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow f'(8) = \frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{2}{3(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cong 0.333$

مقدار التغير التقريبي $\cong hf'(a)$

$\cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cong 0.02$

س باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

sol :

$(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

$b = 1,01$

$a = 1$

$h = 1.01 - 1 = 0.01$

(1/2020 "تطبيقي")

$f(x) = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$

$f(1) = 1^5 + 3(1)^{\frac{1}{3}} + 2 = 6$

$f'(x) = 5x^4 + x^{\frac{-2}{3}} = 5x^4 + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(1) = 5(1)^4 + \frac{1}{(1)^{\frac{2}{3}}} = 5 + 1 = 6$

$f(b) \cong f(a) + h\, f'(a)$

$f(1.01) \cong 6 + (0.01)(6)$

$= 6 + 0.06$

$= 6.06$

س كرة حجمها $\frac{260\pi}{3}\ cm^3$, جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

sol :

نفرض نصف قطر الكرة $= r$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{260\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore r^3 = 65 \Rightarrow r = \sqrt[3]{65}$

$b = 65 , a = 64 , \quad h = 65 - 64 = 1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{64} \Rightarrow f(a) = 4$

(1/2020)

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

(1/2024)

$f'(x) = \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}}$

(1/2024 "محاولات أحياني")

$f'(a) = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) = \frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{48} = 0.02$

$\because f(a + h) \cong f(a) + h.f'(a)$

$\therefore f(b) \cong 4 + 1(0.02)$

$\cong 4 + 0.02$

$\cong 4.02$

$\sqrt[3]{65} \cong 4.02$

س كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

sol :

$V = \frac{4\pi}{3} r^3$

$84\pi = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow r^3 = 63$

$r = \sqrt[3]{63}$

(3/2020 "تطبيقي")

$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$a = 64 , b = 63$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$r(a) = \sqrt[3]{64} = 4$

(3/2023 "تكميلي")

$r'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$r'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(63)^2}} = \frac{1}{48} = 0.02$

$r(a + h) \cong r(a) + hr'(a)$

$r(63) \cong 4 - 0.02 = 3.98$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة , جد بصورة تقريبية المقدار $\sqrt[5]{(0.97)^3 + (0.97)^4 + 3}$

(3/2020)

sol :

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3$

لتكن $a = 1 \quad , \; b = 0.97$

$h = b - a = 0.97 - 1 = -0.03$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{1^3} + 1^4 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$

$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 4x^3$

$f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} + 4(1)^3$

$= \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$

$\cong 5 + (-0.03)(4.6)$

$\cong 5 - 0.138$

$\cong 4.862$

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة ، جد بصورة تقريبية: $\sqrt[5]{(0.98)^3 + 2}$

(2/2020)

sol :

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + 2$

نفرض $a = 1 , b = 0.98$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.98 - 1 = -0.02$

$f(a) = \sqrt[5]{1^3} + 2 = 1 + 2 = 3$

$f(x) = x^{\frac{3}{5}} + 2$

$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

$f'(a) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} = 0.6$

$\therefore f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a)$

$\simeq 3 + (-0.02).0.6$

$\simeq 3 - 0.012$

$\therefore \sqrt[5]{(0.98)^3} + 2 \simeq 2.988$

س مكعب طول حرفه $(9.95)cm$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

(2024/"تمهيدي")

sol :

$b = 9.95$

$a = 10$

$h = -0.05$

نفرض طول حرف المكعب $x =$

$V = x^3$

$V(a) = V(10) = (10)^3 = 1000$

$V'(x) = 3x^2$

$V'(a) = V'(10) = 3(10)^2 = 300$

$V(a+h) \cong V(a) + h.V'(a)$

$\cong 1000 + (-0.05)(300)$

$\cong 1000 - 15$

$\cong 985 \; cm^3$

س كرة حجمها $84\pi \; cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

(2023/تمهيدي "تطبيقي")

(1/2021 "تطبيقي")

sol :

حجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = 84\pi$

$84\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$

$84 = \frac{4}{3}r^3] . \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \; r^3 = 63 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 63 , a = 64 , h = b - a = 64 - 63 = 1$

$\rightarrow \quad h = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

$f'(a) = f'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}$

$= \frac{1}{3} . \frac{1}{16} = \frac{1}{48} = 0.02$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$\cong 4 + (-1)(0.02)$

$\cong 4 - 0.02$

$\cong 3.98 \; cm$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة, جد بصورة تقريبية العدد $\sqrt[3]{0.12}$ (مقربا الناتج لثلاث مراتب)

sol :

الطريقة أولى

$$\sqrt[3]{0.12} = \sqrt[3]{\frac{120}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{120}}{10}$$

لايجاد $\sqrt[3]{120}$

$b = 120$

$a = 125$

$h = b - a = 120 - 125 = -5$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(a) = 5$

$$f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3(5)^2} = \frac{1}{75}$$

$$f(b) \simeq f(a) + h.f'(a)$$

$$\simeq 5 - 5\left(\frac{1}{75}\right)$$

$$\simeq 5 - \frac{1}{15} \simeq 4.934$$

$\sqrt[3]{120} = 4.934$

$$\therefore \sqrt[3]{0.12} \simeq \frac{\sqrt[3]{120}}{10} = \frac{4.934}{10} \simeq 0.493$$

طريقة ثانية

$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 0.120$, $a = 0.125$

$h = b - a = 0.120 - 0.125 = -0.005$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ المشتقة

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$f(a) = f(0.125)\ \sqrt[3]{0.125} = 0.5$ نعوض في الدالة

$f'(a) = f'(0.125)\ \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$ نعوض في المشتقة

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}} = \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \simeq 1.333$$

القانون $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$

$\simeq 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$\simeq 0.5 - 0.006665$

$\simeq 0.493335$

(2020/تمهيدي "تطبيقي")(2/2021 "تطبيقي")
(2/2022 "احيائي")(2022/تمهيدي "تطبيقي")
(2021/"تمهيدي "احيائي")

س مكعب طول حرفه $(9.98\ cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

soi :

$x =$ نفرض طول ضلع المكعب

$V =$ وليكن حجم المكعب

$V(x) = x^3$, $x \in [9.98, 10]$

$V(10) = (10)^3 = 1000\ cm^3$

$V'(x) = 3x^2$

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$

$V(a+h) = V(a) + h\,V'(a)$

$V(9.98) = 1000 + (-0.02)(300)$

$= 1000 - 6 = 994\ cm^3$

$a = 10$
$b = 9.98$
$h = -0.02$

س لتكن $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ، جد مقدار التغير التقريبي الحاصل للدالة اذا تغيرت x من (8) الى (7.8)

sol :

$a = 8$, $b = 7.8$

$h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow f'(8) = \frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{2}{3(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cong 0.333$

مقدار التغير التقريبي $\cong hf'(a)$

$\cong (0.2)\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cong -0.066$

(1/2023 "احيائي")

(2022/"تمهيدي "احيائي")

(3/2023 "تطبيقي")

سكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة ، جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[5]{\frac{1}{33}}$

sol :

$\sqrt[5]{\frac{1}{33}}$

نفرض $f(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = x^{\frac{-1}{5}}$

$a = 32 \ , \quad b = 33 \ , h = b - a = 33 - 32 = 1$

$\therefore h = 1$

$f(a) = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} = 0.5$

("أحيائي"2/2023)

$f'(x) = \frac{-1}{5}\, x^{\frac{-6}{5}} = \frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

$f'(a) = \frac{-1}{5.\sqrt[5]{(32)^6}} = \frac{-1}{5(64)} = \frac{-1}{320}$

$= -0.003$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.\,f'(a)$

$\cong 0.5 + (1)(-0.003)$

$\cong 0.5 - 0.003 \cong 0.497$

س مخروط دائري قائم حجمه $52\pi\ cm^3$ ارتفاعه $6\ cm$ جد طول نصف قطر قاعدته بصورة تقريبة وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعده المخروط (r)

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \rightarrow 52\pi = \frac{\pi}{3} r^2 (6)$

$\rightarrow r^2 = \frac{3*52}{6} \rightarrow r = \sqrt{26}$ الدالة

("أحيائي"3/2023)

$b = 26 \ , \ a = 25,$

$h = b - a \ = \ 26 - 25 \ = \ 1$

$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$r(a) = \sqrt{25} = 5$ نعوض في المشتقة

$r'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$

$r(a+h) \simeq r(a) + h.\,r'(a)$

$r(26) \simeq 5 + 1(0.1)$

$\simeq 5.1$

س باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة ، جد وبصوره تقريبية $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

sol :

الدالة $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$b=63 \ , \ a=64 \ ,$

$h=b-a = 63 - 64 = -1$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعوض في الدالة $f(x) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(64)^2}}$

نعوض في المشتقة $= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{4}{48} = 0.083$

القانون $F(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$F(63) \cong 12 + (-1)\,(0.083)$

$\cong 11.917$

("محاولات تطبيقي"1/2024)

5 الأسئلة الوزارية حول " ايجاد الثوابت "a,b ,c

س اذا كانت $f(x) = 3 + ax + bx^2$ تمتلك نقطة حرجة $(1, 4)$ جد قيمتي a,b الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة

sol:

$f(x) = 3 + ax + bx^2$

$\rightarrow f(1) = 3 + 1 + b$

$\rightarrow a + b = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$

(2/1997)

$f'(x) = a + 2bx$

$\rightarrow 0 = a + 2b$

$\rightarrow a = -2b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(2007/"تمهيدي")

نعوض (2) في (1)

$-2b + b = 1$

$\rightarrow b = -1 \rightarrow a = 2$

$f''(x) = 2b = -2$

النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية < 0

س اذا كانت $(1, 6)$ نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = ax^2 + (x - b)^2$ جد قيمتي a,b

sol:

$f(1) = 6$

$\rightarrow 6 = a + (1 - b)^2$

$\rightarrow a + 1 - 2b + b^2$

$\rightarrow a - 2b + b^2 = 5 \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(1) = 0$

(1/1998)

$\rightarrow f'(x) = 2ax + 2(x - b)$

$\rightarrow [2a + 2(1 - b) = 0] \div 2$

$a = b - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2$

نعوض (2) في (1)

$b - 1 - 2b + b^2 = 5$

$\rightarrow b^2 - b - 6 = 0$

$\rightarrow (b - 3)(b + 2) = 0$

$b = 3 \rightarrow a = 3 - 1 = 2$

$b = -2 \rightarrow a = -2 - 1 = -3$

$f''(x) = 2a + 2 \ , a = 2$

$\rightarrow f''(x) = 6 > 0 \ , \quad a = -3$

$\rightarrow f''(x) = -4 < 0$ يهمل

$\{a = 2 \ , b = 3\}$ مجموعة الحل

س اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيمة $a, b, c \in R$

sol :

$x = 3$

$\rightarrow y + 27 = 28$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow (3 \ , 1)$ نقطة تماس

$f(x) = 3 \rightarrow \ 27a + 9b = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1$

$m = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

(2/2000)

$\rightarrow f'(x) = 27a + 6b$

$f'(3) = m \rightarrow 27a + 6b = -9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots (3)$

$2b = -6a \rightarrow b = -3a$ تعوض في المعادلة (2)

$27a + 6(-3a) = -9$

$\rightarrow 27a - 18a = -9 \rightarrow 9a = -9$

$\rightarrow a = -1$

$b = (-3)(-1) = 3$ تعوض في المعادلة (1)

س اذا كان $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيم $b,c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له

sol:

$\because (-2, -2) \in f(x)$

$\rightarrow f(-2) = -2 \ , \because x = 1$ انقلاب

$\rightarrow f''(1) = 0$

$-8 - 4b - 2c = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c$

$f''(x) = 6x - 2b$

(2/1999)

$\because f''(1) = 0$

$\rightarrow 6 - 2b = 0$

$\rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$

نعوض قيمة (b) في (1)

$-8 - 12 - 2c = -2$

$\rightarrow -2c = 18 \ \rightarrow c = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$\rightarrow [3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 \ , \quad f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

OR $x = -1$,

$f(-1) = -1 - 3 + 9$

$= 5 \quad (3, -27), (-1, 5)$ نقاط حرجة

$f''(x) = 6x - 6$

$\rightarrow f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0$

$f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$

$(3 \ , -27)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$,(-1 \ , 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا علمت ان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-2$ ونهاية صغرى محلية عند $x=4$ جد قيمتي a,b؟

sol :

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-2)=0\ ,f'(4)=0$

$12-4a+b=0$ ..... (1)

$48+8a+b=0$ ..... (2)

(1/2001)

$\rightarrow b=-48-8a$ تعوض في (1)

$12-4a-48-8a=0$

$\rightarrow -12a=36$

$\rightarrow a=-3$

$\rightarrow b=-48+24=-24$

س لتكن $f(x)=x^3+3x^2-9x-6$ جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابة.

sol :

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$f''(x)=6x+6$

(1/2003)

$\rightarrow 6x+6=0\ \rightarrow x=-1$

$\rightarrow f(-1)=-1+3+9-6=5$

نقطة انقلاب وتماس معا $(-1\ ,5)$

$\rightarrow m=f'(-1)=3-6-9=-12$

معادلة المماس $(y-y_1)=m(x-x_1)$

$\rightarrow (y-5)=-12(x+1)$

$y-5=-12x-12$

$\rightarrow 12x+y+7=0$ معادلة المماس المطلوبة

س اذا كان المستقيم $y+9x=28$ يمس المنحني $F(x)=ax^3+bx^2+1$ عند $(3\ ,1)$ جد قيمة $a,b,c\in R$

sol :

$m=\frac{-a}{b}=\frac{-9}{1}=-9$ ميل المستقيم

$\because (3,1)$ نقطة تماس

(2/2009)

$\rightarrow f(3)=1\ ,\ f'(3)=m$

$27a+9b+1=1$

$\rightarrow 3a+b=0$

$\rightarrow b=-3a$ ..... (1)

(2/2024 "محاولات")

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$\rightarrow f'(x)=27a+6b$

$f'(3)=m$

$\rightarrow 27a+6b=-9$ ..... (2)

$27a-18a=-9\rightarrow 9a=-9$

$\rightarrow a=-1\rightarrow b=3$

س اذا كان المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيم $a\ ,b,c\in R$ ؟

sol :

$y=ax^2+bx+c$

$y'=2ax+b$

(2/2003)

$3x-y=7$ ميل المستقيم

$m=\frac{x\text{ معامل }-}{y\text{ معامل }}=\frac{-3}{-1}=3$

$\because$ المستقيم يمس المنحني فأن ميل المنحني= ميل المستقيم عند $x=2$

(4/2014 "أسئلة الانبار")

$2ax+b=3$

$2a(2)+b=3$

$4a+b=3$ ..... (1)

y للمنحني y نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$

$2ax+b=0$

(1/2015 "خارج القطر")

$2a\left(\frac{1}{2}\right)+b=0$

$a+b=0$ ..... (2)

(1/2016)

$a+b=0$ ..... (2)

$\mp 4a\mp b=3$ ..... (1)

بالطرح

$-3a=-3\rightarrow a=1$

نعوض قيمة a في معادلة رقم (2)

(3/2017)

$1+b=0\rightarrow b=-1$

$y=x^2-x+c$ الدالة تصبح

النقطة $(2,-1)$ تحقق المعادلة

(1/2023 "تطبيقي")

$-1=2^2-2+c$

$-1=4-2+c$

$-1=2+c\rightarrow c=-3$

س اذا كانت منحني الدالة $f(x)=2ax^2+b$ وكانت $a\in\{-1,0\ ,1\ ,3\}$ تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة a

sol :

$f'(x)=4ax$

(1/2004)

$\rightarrow f''(x)=4a$

$a=-1$

$\rightarrow f''(x)=-4<$ تمتلك نهاية عظمى محلية

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث ان النقطة $(-1,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي(1)

sol :

$f(x)=ax^3-bx^2+cx$

$4=a(-1)^3-b(-1)^2+c(-1)$

النقطة $(-1,4)$ تنتهي للدالة فتحققها

$-a-b-c=4 \ldots\ldots\ldots(1)$

(2/2004)

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$

$f''(x)=6ax-2b$

(3/2014)

$0=6a(-1)-2b$

$-6a-2b=0 \quad \}\div(2)$

$3a+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

(2/2016"خارج القطر")

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$

$-1=3a(-1)^2-b(-1)+c$

$3a+2b+c=-1 \ldots\ldots\ldots(3)$

$-a-b-c=4$

بالجمع

$2a+b=3$

$\mp 3a \mp b=0$

(1/2019"خارج القطر")

بالطرح

$-a=3 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

$-9+b=0 \quad \Rightarrow b=9$

$-(-3)-9-c=4 \quad \Rightarrow \quad c=-10$

المعادلة $f(x)=-3x^3-9bx^2-10x$

س اذا كانت $(1,-2)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=ax^2-(x+b)^2$ فجد قيمة $a,b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

sol :

$f(1)=-2 \rightarrow -2=a-(1+b)^2$

$\rightarrow -2=a-(1+2b+b^2)$

$\rightarrow -2=a-1-2b-b^2$

$\rightarrow a-2b-b^2=-1 \ldots\ldots\ldots(1)$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=2ax-2(x+b)$

$\rightarrow [2a-2(1+b)=0]\div 2$

$a=b+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2$

نعوض (2) في (1)

$b+1-2b-b^2=-1$

$\rightarrow b^2+b-2=0$

(1/2009)

$\rightarrow (b+2)(b-1)=0$

اما $b=-2$ يهمل

او $b=1 \rightarrow a=1+1=2$

$f''(x)=2a-2 \, , a=2$

$\rightarrow f''(x)=2>0 \, , \quad (1,-2)$ صغرى محلية

س اذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a,b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

sol :

نعوض النقطة $F(x)=a-(x-b)^4 \, , \quad (2,6)$

$6=a-(2-b)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$x=2 \, , \; F(x)=y=6$

$F'(x)=-4(x-b)^3$

لكن $F'(x)=0$ عند النقطة $(2,6)$

$\{0=-4(2-b)^3\}\div(-4)$

$\rightarrow (2-b)^3=0$ بالجذر التكعيبي

$2-b=0 \rightarrow b=2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$6=a-(2-2)^4 \rightarrow a=6$

(1/2011"خارج القطر")

$\therefore F(x)=6-(x-2)^4$

$\rightarrow F'(x)=-4(x-2)^3(1)$

$F'(x)=-4(x-2)^3$

$\rightarrow \{0=-4(x-2)^3\}\div -4$

(1/2024"محاولات تطبيقي")

$\rightarrow (x-2)^3=0$

$\rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$

$F'(x)$ +++++++ 2 --------

تزايد تناقص

∴ النقطة $(2,6)$ نهاية عظمى محلية للدالة

س اذا علمت ان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ جد قيمتي a,b؟

sol :

(2023/تمهيدي"تطبيقي")

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0 \, , f'(2)=0$

(1/2012)

$3-2a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$12+4a+b=0 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1/2013)

$\rightarrow b=-12-4a$ تعوض في(1)

$3-2a-12-4a=0$

(1/2008"خارج القطر")

$\rightarrow -6a=9$

$\rightarrow a=-\frac{3}{2}$

(1/2015"خارج القطر")

$\rightarrow b=-12-4\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=-12+6=-6$

(3/2016"خارج القطر")

س اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت F مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة F نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ فجد قيم الثوابت $a,b,c\in R$ ؟

sol :

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

مقعرة $x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ $\therefore$ $f''(x)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

(3/2012)

$f''(x)=6ax+2b$

$0=6a(1)+2b \quad \rightarrow [0=6a+2b]\div 2$

$0=3a+b \ldots\ldots\ldots(1)$

للدالة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$ $\Leftarrow$ $f'(x)=0$

$0=3a(-1)^2+2b(-1)+c$

(1/2015)

$0=3a-2b+c \ldots\ldots\ldots(2)$

النقطة $(-1,5)$ ∋ لمنحني الدالة

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$

$5=-a+b-c \quad \ldots\ldots\ldots(3)$

(2017/"تمهيدي")

$0=3a-2b+c \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

$5=-a+b-c \quad \ldots\ldots\ldots(3)$

بالجمع

$5=2a-b \ldots\ldots\ldots(4)$

(2/2019)

$5=2a-b \quad \ldots\ldots\ldots(4)$

(1/2019 "تطبيقي")

$0=3a+b \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

بالجمع

$5=5a \quad \rightarrow \quad a=1$

نعوض قيمة a في معادلة رقم (1)

$0=3(1)+b \quad \rightarrow \quad b=-3$

نعوض a , b في معادلة (3)

$5=-1+(-3)-c$

$5=-1-3-c \quad \rightarrow \quad 5=-4-c$

$c=-4-5=-9$

س لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a\in R, x\neq 0$ برهن على ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

sol :

$F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $x\neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2-ax^{-1}$

$F'(x)=2x+ax^{-2} \Rightarrow F'(x)=2x+\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3+a}{x^2}$

$0=\frac{2x^3+a}{x^2} \Rightarrow 2x^3+a=0 \Rightarrow 2x^3=-a$

$\Rightarrow x^3=-\frac{a}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

(1/2013)

$\Rightarrow F''(x)=2-2ax^{-3}=2-\frac{2a}{x^3}$

(3/2019)

$\therefore F''(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})=2-\frac{2a}{(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})^3}=2-\frac{2a}{-\frac{a}{2}}$

$\therefore F''(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})=2+\frac{4a}{a}=6>0$ موجبة

$\therefore$ للدالة F نهاية صغرى عند $x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

س اذا كانت للدالة $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ لها نقطة انقلاب هي النقطة $(1,8)$, جد قيمتي a,b الحقيقيتين

sol:

$f(x)=x^3-ax^2+bx+3$

$\because$ $(1,8)$ نقطة انقلاب

$\therefore$ تحقق منحني الدالة

$8=1-a+b+3$

$8-4=-a+b \quad \rightarrow -a+b=4 \ldots\ldots(1)$

$f'(x)=3x^2-2ax+b \quad \rightarrow f''(x)=6x-2a$

$f''(x)=0$ عندما $x=1$

(3/2018)

$0=6-2a$

$2a=6 \quad \rightarrow a=\frac{6}{2} \quad \rightarrow a=3$

نعوضها في (1) لايجاد b

$-a+b=4$

$-3+b=4 \quad \rightarrow b=4+3 \quad \therefore b=7$

شبكة المساعد
@SadsHelp

(1/2014)

س اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر لكل $x<1$
ومحدب لكل $x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$
عند $x=3$ جد قيمة $a,b,c\in R$ (او)

("الموصل" 3 /2017)(1 /2017)
("تطبيقي" 2/2019) ("خارج القطر" 2 /2018)

س اذا كان منحني الدالة $F(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر لكل $[x: x<1]$ ومحدب لكل $[x: x>1]$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ جد قيمة $a,b,c\in R$

sol :

$x=3\rightarrow y+27=28$

$\rightarrow y=1\rightarrow (3,1)$ نقطة تماس

$f(x)=1\rightarrow 27a+9b+c=1$ ..... (1

$m=\frac{-a}{b}=\frac{-9}{1}=-9$ ميل المستقيم

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$\rightarrow f'(x)=27a+6b$

$f'(3)=m\rightarrow 27a+6b=-9$ ..... (2)

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=0\rightarrow 6a+2b=0$ ..... (3)

$2b=-6a$

$\rightarrow b=-3a$ تعوض في المعادلة(2)

$27a+6(-3a)=-9$

$\rightarrow 27a-18a=-9$

$\rightarrow 9a=-9\rightarrow a=-1$

$b=(-3)(-1)=3$ تعوض في المعادلة(1)

$-27+27+c=1\rightarrow c=1$

س اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $F(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة $c\in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه؟

sol:

$F(x)=3x^2-x^3+c$

$y=6$ 6 تمثل نهاية صغرى محلية للدالة اي ان

∴ النقطة $x\ (x,6)$ نجدها من المشتقة الاولى

$F'(x)=6x-3x^2$

(1/2012 "خارج القطر")

$(0=6x-3x^2)\div 3$

$\Rightarrow 2x-x^2=0$

$\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow x=0,x=2$

$f''(0)=6-6x$

(3/2016)

$\Rightarrow f''(0)=6-0=6>0$

$f''(2)=6-12=-6<0$

$f(x)\in$ هي نقطة النهاية الصغرى(0.6)

$6=0-0+6\Rightarrow c=6$

$\Rightarrow f(x)=3x^2-x^3+6$

(2/2021 "تطبيقي")

$f'(x)=6x-3x^2$

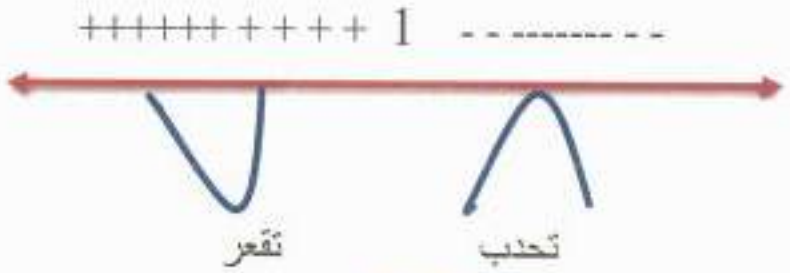
$\Rightarrow f''(x)=6-6x$

(3/2023 "احياني")

$6-6x=0$

$\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1$

$f(1)=3-1+6=8\Rightarrow (1,8)$ انقلاب مرشحة



∴ نقطة الانقلاب $(1,8)$

$F'(x)=6x-3x^2$

ميل المماس عند $(1,8)$

$\therefore F'(1)=6(1)-3(1)^2$

$\Rightarrow F'(1)=3$, $(1,8)$ ميل المماس عند النقطة

∴ معادلة المماس $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-8=3(x-1)$

$\Rightarrow y-8=3x-3$

$\Rightarrow 3x-y+5=0$ معادلة المماس المطلوبة

سكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كان المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x=5$ جد قيم $a,b,c\in R$ ؟

sol:

$y=ax^2+bx+c$

$\because$ $(2,-1)$ نقطة تماس ← تحقق منحني الدالة

$-1=4a+2b+c$ ..... (1)

$\because$ منحني الدالة يمس المستقيم ← $f'(x)=M$

ميل المستقيم $3x-y=7$

$M=\frac{\text{معامل x}-}{\text{معامل y}}=\frac{-3}{-1}=3$

(1/2018)

$f'(x)=2ax+b$

$\rightarrow f'(2)=4a+b$

$\therefore 4a+b=3$ ..... (2)

$\because$ للمنحني نهاية صغرى محلي ← $f(x)=0$

$0=10a+b$ ..... (3)

$\mp 3=\mp 4a\mp b$ ..... (2)

بالطرح

$-3=6a\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\therefore b=-10*\frac{-1}{2}\rightarrow b=+5$

س اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+cx$ و $g(x)=1-12x$ وكان كل من F و g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة نقطة انقلاب هي $(1,-11)$ فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$

sol:

$F(x)=ax^3+bx^2+cx$ نعوض النقطة $(1,-11)$

$-11=a(1)^3+b(1)^2+c(1)$

$\Rightarrow a+b+c=-11$ ——— (1)

$g(x)=1-12x$ هو (المستقيم) ميل المماس $g'(x)=-12$

او يمكن ان نجد الميل $(y+12x=1)$ $-12=\frac{-12}{1}=\frac{\text{معامل x}-}{\text{معامل y}}$

ميل المماس $F'(X)=$ عند النقطة $(1,-11)$

$F'(x)=3ax^2+2bx+c$

$F'(x)=-12$ عند $(1,-11)$

(2/2014)

$-12=3a(1)^2+2b(1)+c$

$\Rightarrow 3a+2b+c=-12$ ——— (2)

$\mp a\mp b\mp c=\pm 11$ ——— (1)

بالطرح

$2a+b=-1$ ——— (3)

$F''(x)=6ax+2b$

(1/2017 "أسئلة الموصل")

لكن $F''(x)=0$ عند $(1,-11)$

$0=6a(1)+2b\Rightarrow(6a+2b=0)\div(2)$

$3a+b=0$ ——— (4)

$\mp 2a\mp b=\pm 1$ ——— (3)

(1/2017 "خارج القطر")

بالطرح

$\Rightarrow a=1$

$\therefore 3a+b=0$ ——— (4) $\Rightarrow 3(1)+b=0\Rightarrow b=-3$

(2/2023 "أحيائي")

$a+b+c=-11$ ——— (1)

$\Rightarrow 1+(-3)+c=-11\Rightarrow c=-9$

س اذا كان للدالة $F(x)=ax^3+3x^2+c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ فجد قيمة a,c ؟

Sol:

(2/2015)

$F(x)=ax^3+3x^2+c$, $F''(x)=0$

(2/2017 "خارج القطر")

$F'(x)=3ax^2+6x$

$F''(x)=6ax+6$ عند $x=1$ $F''(x)=0$

$0=6a(1)+6\Rightarrow 6a=-6\Rightarrow a=-1$

(2024/ "تمهيدي")

$\therefore F(x)=-x^3+3x^2+c$

نهاية عظمى محلية تساوي $8\Leftarrow y=8$

$\therefore$ نقطة النهاية العظمى هي $(x,8)$ x نجدها من المشتقة الأولى

$F'(x)=-3x^2+6x$, $(0=-3x^2+6x)\div(-3)$

$x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0$

(2/2015 "خارج القطر")

$\Rightarrow x=0$, $x-2=0\Rightarrow x=2$

(1/2019)

$F''(X)$ ——— 0 +++ +++ 2 ———

$\therefore$ النقطة $(2,8)$ نهاية عظمى محلية للدالة

نعوض النقطة $(2,8)$ في الدالة لإيجاد قيمة c

$8=-8+12+c\Rightarrow c=4$

سكة المساعد
@SadsHelp

س لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a\in R, x\neq 0$ دالة, جد قيمة a علماً ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند x=1 ثم بين ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

sol :

$$F(x)=x^2+\frac{a}{x},\ x\neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2+ax^{-1}$$

$$F'(x)=2x-ax^{-2} \Rightarrow F''(x)=2x+ax^{-3}$$

$$f''(x)=2+\frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''(x)=0$$

$2+\frac{2a}{x^3}$ $x=1$ عند

$$2+\frac{2a}{(1)^3} \rightarrow 2a=-2 \quad \rightarrow a=-1$$

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$$

$$\left[2x+\frac{1}{x^2}=0\right].(x^2)$$

$$2x^3+1=0$$

$$\rightarrow 2x^3=-1$$

$\rightarrow x^3=\frac{-1}{2}$ بجذر الطرفين

$$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)=2-\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3}=2+4=6>0$$

توجد للدالة نهاية صغرى محلية لاتمتلك الدالة نهاية عظمى محلية عند

$$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

(2/2017)

(3/2023 "تطبيقي")

س اذا كانت للدالة $f(x)=3x-x^3+c$ نقطة نهاية عظمى محلية تنتمي لمحور السينات,جد c ثم جد معادلة المماس عند نقطة انقلابة

sol :

$$f(x)=3x-x^3+c$$

$$f'(x)=[3-3x^2=0]\div 3$$

$$1-x^2=0$$

$$x=1$$

$$x=-1$$

∴النهاية تنتمي لمحور السينات

$\therefore y=0 \rightarrow (1,0)$ نعوضها في المعادلة

$$f(x)=3x-x^3+c$$

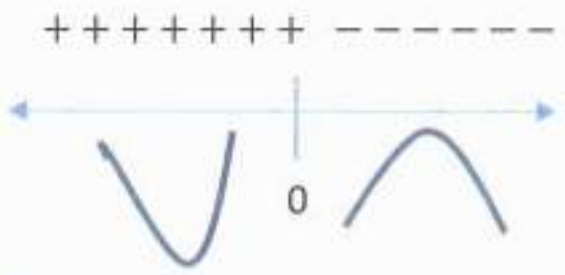
$$\rightarrow 0=3(1)-(1)^3+c \rightarrow c=-2$$

$$f(x)=3x-x^3-2$$

$$f'(x)=3-3x^2$$

$$\rightarrow f''(x)=-6x=0$$

$x=0 \rightarrow y=-2$



نقطة انقلاب $(0,-2)$

$m=f'(0)=3$ ميل المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+2=3(x-0)$$

$$\rightarrow y+2=3x$$

$3x-y-2=0$ معادلة المماس

(2/2018)

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كانت النقطة (-1,5) حرجة لمنحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وللدالة نقطة انقلاب عند x=1 ,جد قيم الثوابت $a,b,c \in R$, ثم بين نوع النقطة الحرجة؟

sol:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

∵ $(-1,5)$ نقطة حرجة

∴ تحقق منحني الدالة

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c$ ..... (1)

("1/2018 خارج القطر")

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-1) = 3a - 2b + c$

$\rightarrow 3a - 2b + c = 0$ ..... (2)

$5 = -a + b - c$ ..... (1)

$0 = 3a - 2b + c$ ..... (2)

بالجمع

$5 = 2a - b$ ..... (3)

بما ان الدالة f تمتلك نقطة الانقلاب عند $x = 1 \leftarrow f''(1) = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a + 2b \rightarrow 6a + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0$ ..... (4)

بحل المعادلتين 3 و4 انيا ينتج

$2a - b = 5$ ..... (3)

$3a + b = 0$ ..... (4)

بالجمع

نعوضها في معادلة رقم (3) $5a = 5] \div 5 \rightarrow a = 1$

$2 - b = 5 \rightarrow b = -3$

نعوض قيمتي a وb في معادلة رقم (1)

$-4 - c = 5 \rightarrow -4 - 5 = c \rightarrow c = -9$

لمعرفة نوع النقطة الحرجة

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$x = -1 \leftarrow (-1,5)$

+++ +++++ -1 ------

∴ النقطة (-1 ,5) نقطة نهاية عظمى محلية

س عيّن قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y=x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب ان وجدت؟

sol:

$y=x^3 + ax^2 + bx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

("2/2017 أسئلة الموصل")

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = -1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

$\Rightarrow 0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$-2a+b= -3$ ——————(1)

("3/2019 تطبيقي")

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = 2$

$0 = 3(4) + 2a(2) + b$

$\Rightarrow 4a+b=-12$ ——————(2)

$\pm 2a \mp b = \pm 3$ ——————(1)

بالطرح

$6a = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$

نعوض في احدى المعادلتين لإيجاد قيمة b

$-2a + b = -3 \Rightarrow -2(\frac{-3}{2}) + b = -3$

$3 + b = -3 \Rightarrow b = -6$

$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

("3/2023 تكميلي")

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$

$\Rightarrow 0 = 6x - 3$

$\Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3$

$= \frac{1-3-24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

- - - - - - + + + + + +

∴ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

y محدبة في $\{x: x < \frac{1}{2}\}$

y مقعرة في $\{x: x > \frac{1}{2}\}$

∴ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$ نقطة انقلاب

شبكة المساعد
@SadsHelp

س لتكن $f(x)=ax^2+bx+6$ حيث $b\in R$ وان $a\in\{-1,4\}$, جد قيمة a اذا علمت ان :

1) الدالة f محدبة 2) الدالة f مقعرة

sol :

$f(x)=ax^2+bx+6$

$f'(x)=2ax+b$

$f''(x)=2a$

(2019/"تمهيدي")

عندما $a=-1$

$f''(x)=2*(-1)=-2<0$ $\rightarrow$ محدبة f $\therefore$

عندما $a=4$

$f''(x)=2*(4)=8>0$ $\rightarrow$ مقعرة f $\therefore$

طريقة ثانية للحل

$f(x)=ax^2+bx+6$

$f'(x)=2ax+b$

$f''(x)=2a$

1) الدالة f محدبة

$\therefore f'(x)<0$

$2a<0 \rightarrow a<0$

$\therefore a=-1$ لان $a\in\{-1,4\}$

2) الدالة f مقعرة

$\therefore f''(x)>0$

$2a>0 \rightarrow a>0$

$\therefore a=4$ لان $a\in\{-1,4\}$

س اذا كانت $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ دالة لها نقطة حرجة عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $(1,22)$ فما قيمة كل من $a,b,c\in R$ ؟

sol :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(1 , 22) تحقق المعادلة اعلاه

$(1)^3+a(1)^2+b(1)+c=22$

$a+b+c=21$ ..... (1)

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(2019/"تمهيدي"تطبيقي")

$f'(4)=0$

$3(4)^2+2a(4)+b=0$

$48+8a+b=0$

$8a+b=-48$ ..... (2)

$f''(x)=6x+2a$

$f''(1)=0$

$6(1)+2a$

$2a=-6$

$\rightarrow a=-3$

نعوض في (2)

$8(-3)+b=-48$

$-24+b=-24$

$\rightarrow b=-24$

بالتعويض في (1) عن قيمتي a , b نحصل

$-3-24+c=21$

$\rightarrow c=48$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كانت $f(x) = x^3 - 3X^2 + 4$ والمستقيم $2x + ay = 5 + 3b$ متماسان في نقطة انقلاب المنحني $f(x)$ جد $a, b \in R$

sol :

المعطى :- الدالة $f(x)$ متماسة مع معادلة المستقيم

الدالة $f(x)$ لها نقطة انقلاب يعني مشتقة الثانية $= 0$

$f^{\setminus}(x) = 3x^2 - 6x$

$f^{\setminus\setminus}(x) = 6x - 6$

(1/2019 "خارج القطر "تطبيقي")

$\rightarrow 6x - 6 = 0$

$\rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = +1$

عند $x = 1$ نقطة انقلاب

$f(1) = 1 - 3(1) + 4 = 2$ $(1,2)$ نقطة انقلاب

$(1,2)$ تحقق معادلة المستقيم

$2x + ay = 5 + 3b$

$2(1) + a(2) = 5 + 3b$

$2a - 3b = 3 \ldots\ldots\ldots (1)$

$f(x)$ مماسة مع معادلة المستقيم لها نفس الميل

مشتقة المماس = مشتقة الدالة $f(x)$ عند $x = 1$

$f^{\setminus}(x) = 3x^2 - 6x$

$2x + sy = 5 + 3b$

$ay = 5 + 3b - 2x$

$y = \frac{5+3b-2x}{a}$

$y^{\setminus} = \frac{-2}{a}$

$3x^2 - 6x = \frac{-2}{a}$

$3 - 6 = \frac{-2}{a}$

$-3 = \frac{-2}{a}$

$a = \frac{2}{3}$

من واحد نعوض بقيمة $a = \frac{2}{3}$ $2\left(\frac{2}{3}\right) - 3b = 3$

$\frac{2}{3} - 3b = 3$

$4 - 9b = 9$

$b = \frac{-5}{9}$

س إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، وكانت f مقعرة عندما $x > 1$ ، ومحلية عندما $x < 1$ ، وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ ، جد قيمة $a, b, c \in R$.

sol :

∵ ان الدالة f مقعرة $\{x: x > 1\}$

f محدبة $\{x: x < 1\}$

∴ $f''(x) = 0$ عند $x = 1$

$f'(x) = 3a^2 + 2bx + C$

(2/2020)

$f''(x) = 6ax + 2b$

$0 = 6a + 2b \;]\div 2 \Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

للدالة نهاية عظمى فأن $f'(x) = 0$ عند $x = -1$

$0 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c$

$0 = 3a - 2b + c \ldots\ldots (2)$

النقطة $(-1, 5)$ تحقق المعادلة

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots\ldots (3)$

$0 = 3a - 2b + c \ldots\ldots (2)$

بالجمع

$5 = 2a - b \ldots\ldots (4)$

$0 = 3a + b \ldots\ldots (1)$

بالجمع

$5 = 5a \Rightarrow a = 1$

نعوض قيمة a بمعادلة (1)

$0 = 3(1) + b \Rightarrow b = -3$

نعوض قيمة a , b بمعادلة (3)

$5 = -1 - 3 - c$

$c = -5 - 4$

$c = -9$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كانت $f(x) = ax^2 - bx^3 + cx$ وكانت $g(x) = 3x + 5$ ، وكان كلا من f و g متماسان عند نقطة الانقلاب للمنحني f وهي $(1,8)$ جد قيم $a, b, c \in R$

sol :

$f(x) = ax^2 - bx^3 + cx \quad , \quad g(x) = 3x + 5$

بتعويض نقطة الانقلاب $(1,8)$ $\Leftarrow$

$8 = a(1)^2 - b(1)^3 + c(1)$

$8 = a - b + c \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

للدالة f نقطة انقلاب $\Leftarrow$

$f'(x) = 2ax - 3bx^2 + c$

$f''(x) = 2a - 6bx$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 2a - 6b(1) = 0$

$\Rightarrow 2a - 6b = 0 \,] \div 2$

$a - 3b = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

بما ان f و g متماسان عن النقطة $(1,8) \Leftarrow g'(x) = 3$

$\because f'(1) = g'(1)$

$\Rightarrow 2a(1) - 3b(1)^2 + c = 3$

$2a - 3b + c = 3 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

ويحل المعادلتين (1) و (3) آنيا $\Leftarrow$

$2a - 3b + c = 3$

$\mp a \pm b \mp c = \mp 8$ بالطرح

$a - 2b = -5 \quad \ldots\ldots (4)$

ويحل المعادلتين (2) و (4)

$a - 2b = -5$

$\mp a \pm 3b = 0$ بالطرح

(1/2022 "احيائي")

$b = -5$

بتعويض قيمة b في معادلة (4) $a - 2b = -5$

$a - 2(-5) = -5$

$a + 10 = -5 \Rightarrow a = -15$

بتعويض قيمتي a, b في المعادلة (1)

$8 = a - b + c$

$8 = -15 - (-5) + c$

$8 = -15 + 5 + c$

$8 = -10 + c$

$c = 18$

س اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 2 - 12x$ وكان كلا من f و g متماسان عند نقطة الانقلاب للدالة f وهي $(1, -11)$ ، جد قيم الثوابت $a, b, c \in R$

sol :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad , \quad g(x) = 1 - 12x$

$M_f = M_g$ عند $x = 1$

$M_g = g'(x) = -12$

$\because (x, y) = (1, -11)$

$-11 = a + b + c \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$\because M_f = M_g \Rightarrow f'(1) = -12$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(1) 3a + 2b + c$

$-12 = 3a + 2b + c \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

$\pm 11 = \mp a \mp b + c \quad \ldots\ldots\ldots (1)$ بالطرح

$-1 = 2a + b \ldots\ldots\ldots (3)$

$\because (1, -11)$ نقطة انقلاب

$\therefore f''(1) = 0$

(2/2022 "احيائي")

$f''(x) = 6ax + 2b$

$0 = 6a + 2b \,] \div 2$

$0 = 3a + b \quad \ldots\ldots\ldots (4)$

$\pm = \mp 2a \mp b \ldots\ldots\ldots (3)$ بالطرح

$1 = a$

$\therefore b = -3a \Rightarrow b = -3$

نعوض قيم a, b بمعادلة (1) لايجاد c

$-11 = a + b + c$

$-11 = 1 - 3 + c$

$c = -11 + 2$

$c = -9$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س بأستخدام اختبار المشتقة الثانية إن امكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 4 - (x+1)^4$

sol :

(3/2023"تكميلي")

$f(x) = 4 - (x+1)^4$

$f'(x) = -4(x+1)^3$

$0 = -4(x+1)^3 \;] \div -4$

$0 = (x+1)^3$ بالجذر

$0 = x+1 \quad \rightarrow \quad x = -1$ عدد حرج

$f''(x) = -12(x+1)^2$

$f''(-1) = -12(-1+1)^2$

$= -12(0) = 0$

∴ الاختبار فاشل

∴ لا يمكن إيجاد النهايات المحلية بأستخدام المشتقة الثانية كوننا لا نعرف إشارة المشتقة الثانية

س اذا علمت أنّ (2, 3) نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد $a, b \in R$

sol :

تحقق المعادلة $f(x) = a - (x-b)^4$, $(2, 3)$

$3 = a - (2-b)^4$ ..... (1)

(1/2024)

$f'(x) = -4(x-b)^3$

$f'(2) = 0$

$\{-4(2-b)^3 = 0\} \div (-4)$

$\rightarrow (2-b)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي

$2-b=0 \rightarrow b = 2$ ..... (2)

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

(1/2024 "أحيائي")

$3=a-(2-2)^4$

$3=a-(0)^4$

$\rightarrow a = 3$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(1/1997)

sol :

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

∴ النقطتان (1, 0) (-1, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=-1$

∴ النقطة (0, -1) تقاطع مع الصادات

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=F(x)$

⇒ الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+1 \neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي:

$y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+$

$y=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-yx^2=y+1$

$x^2(1-y)=y+1$

$\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y}, 1-y=0 \Rightarrow y=1$

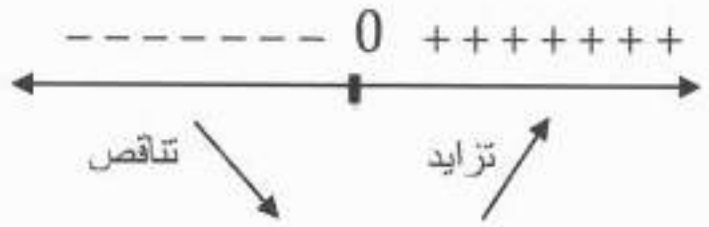
تجعل x غير معرفة y=1

معادلة المحاذي الأفقي ∴ y=1

5)

$F'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$



F متزايدة في {x: x >0}

F متناقصة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, -1) نهاية صغرى محلية للدالة

$F''(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$\Rightarrow F''(x)=\frac{x^2+1[4x^2+4-16x^2]}{(x^2+1)^4}$

$=F''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow 0=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

$\Rightarrow 0=4-12x^2 \Rightarrow 12x^2=4$

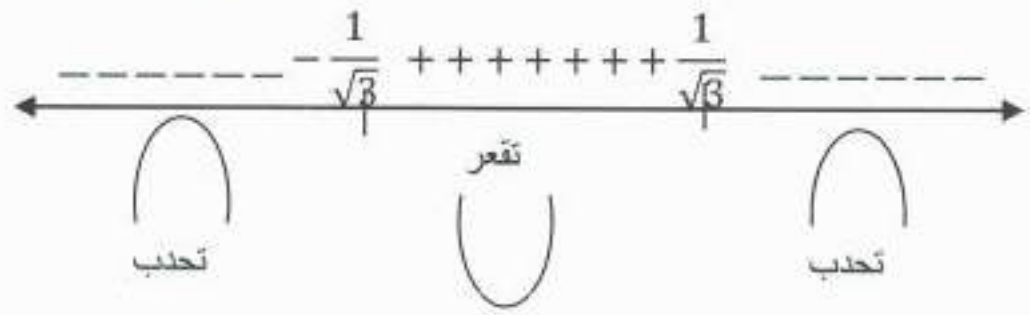
$\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$

النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$

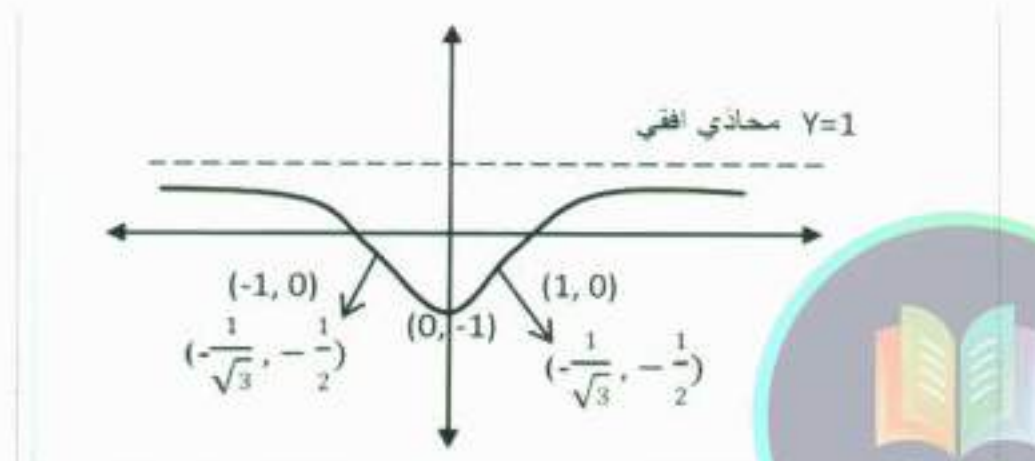
$F(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$ النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$



F محدبة في $\{x: x<\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

F مقعرة في $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

∴ النقطتان $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ نقطتا انقلاب



(1/1999) (1/2007) (2006 "تمهيدي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x$

sol :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

if $x=0 \rightarrow y=0$, if $y=0$

$\rightarrow x^3-3x=0 \rightarrow x(x^2-3)=0$

$\rightarrow x=0$ OR $x^2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0)\ ,(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$

3)التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x$

$=-(x^3-3x)=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات

$F'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow 3x^2=3$

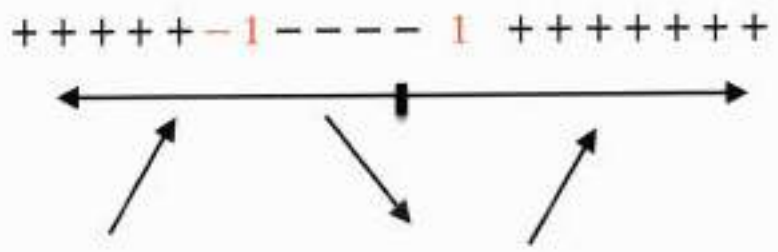
$\rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

نعوض في الدالة الاصلية $F(1)=(1)^3-3(1)=-2$

$F(-1)$

$=(-1)^3-3(-1)=2$

$x<-1 \quad (-1,1) \quad x>1$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x \in (-1,1)\}$

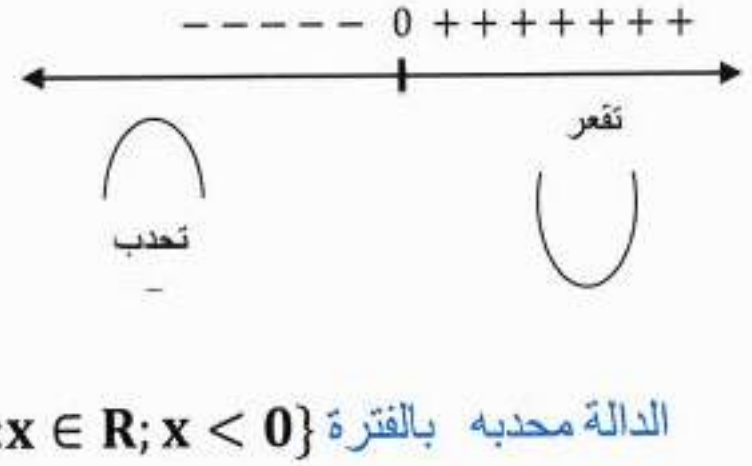
صغرى $(1,-2)$, نهاية عظمى $(-1,2)$

$F''(x)=6x \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$

نعوض في الدالة الأصلية $F(0)=6(0)$

نقطة انقلاب مرشحة $(0,0)$

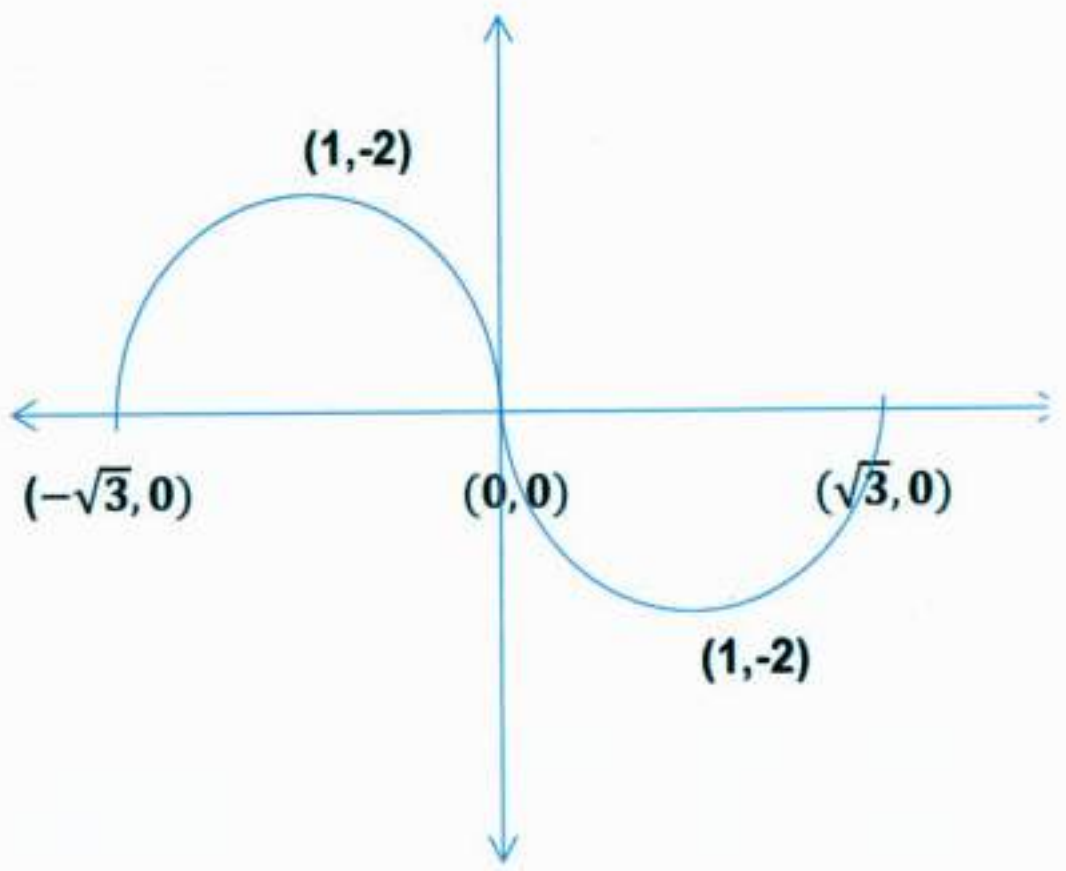
$x<0 \qquad x>0$



الدالة محدبه بالفترة $\{x:x \in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x \in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,0)$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2000/ 1) (2006/ 1) (2007/ 1 خارج القطر) (2008/ تمهيدي) (2013/2) (2014/ تمهيدي)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^5$

sol :

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

∴ النقطة (0, 0) نقطة تقاطع مع السينات

$0 = x^5 \Rightarrow x = 0$

∴ النقطة (0, 0) نقطة تقاطع مع محور الصادات

$f(0) = (0)^5 = 0$

3) التناظر

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$

∴ الدالة متناظرة حول نقطة الاصل.

4) المحاذيات/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x) = 5x^4 \Rightarrow 0 = 5x^4$

$\Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0) = (0)^5 = 0$

∴ النقطة (0, 0)

+ ++ + + + + 0 + ++ + + + +

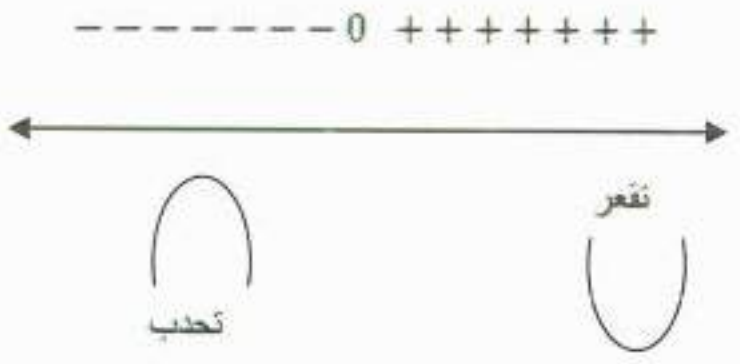
متزايدة في {x: x>0} , {x: x<0}

∴ النقطة (0, 0) نقطة حرجة فقط

$F''(x) = 20x^3 \Rightarrow 0 = 20x^3$

$\Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0) = (0)^5 = 0$



∴ النقطة (0, 0)

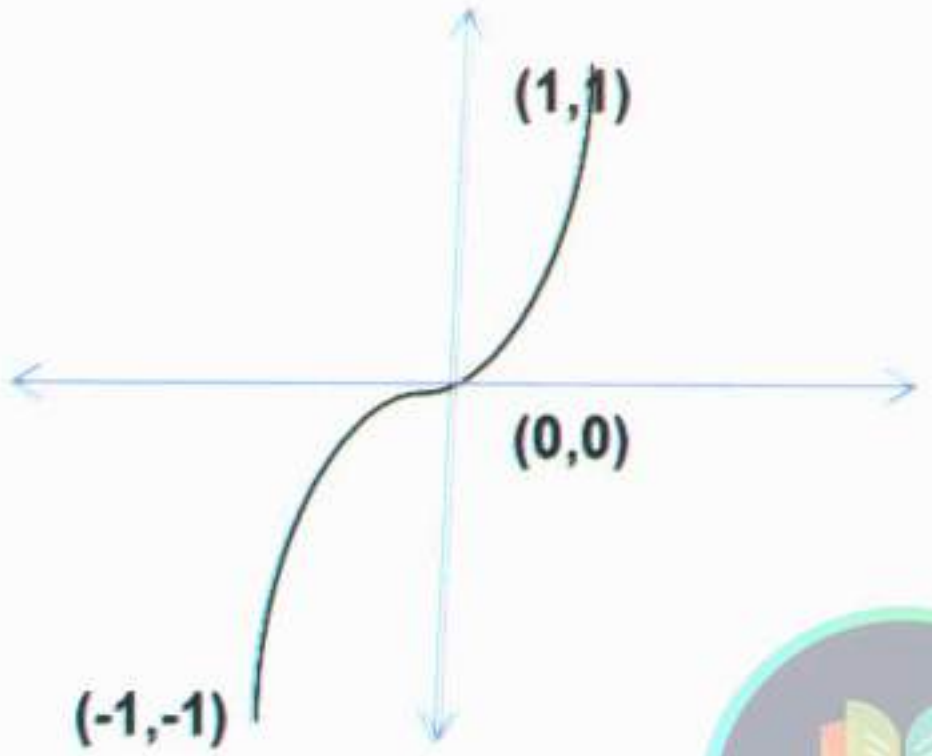
F محدبة في {x: x <0}

F مقعرة في {x: x >0}

∴ النقطة (0, 0) نقطة انقلاب.

نقاط مساعدة

(x,y)
(-1,-1)
(0,0)
(1,1)



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2/2000)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(x^2-1)^2$

sol :

1) اوسع مجال للدالة $R =$

2) التقاطع مع المحورين

if $x=0 \rightarrow y=1$,

if $y=0 \rightarrow (x^2-1)^2=0$

$\rightarrow (x^2-1)=0$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,1),(-1,0),(1,0)$

3) التناظر:

$F(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=x^4-2x^2+1=F(x)$

المنحني متناظر حول محور الصادات $\rightarrow$

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)=4x^3-4x$

$\Rightarrow 4x^3-4x=0$

$\rightarrow 4x(x^2-1)=0$

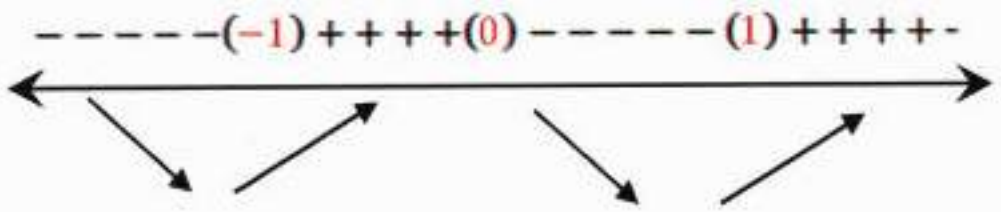
$\rightarrow x=0 \rightarrow f(0)=1$

or $x=1 \rightarrow f(0)=0$

or $x=-1 \rightarrow f(-1)=0$

نقاط حرجة $(0,1),(-1,0),(1,0)$

$x<-1$ $(-1,0)$ $(0,1)$ $x>1$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x\in R;x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x\in R;x<-1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x\in R;x\in(-1,0)\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R;x\in(0,1)\}$

نهاية عظمى $(0,1)$

نهاية صغرى $(-1,0)$

نهاية صغرى $(1,0)$

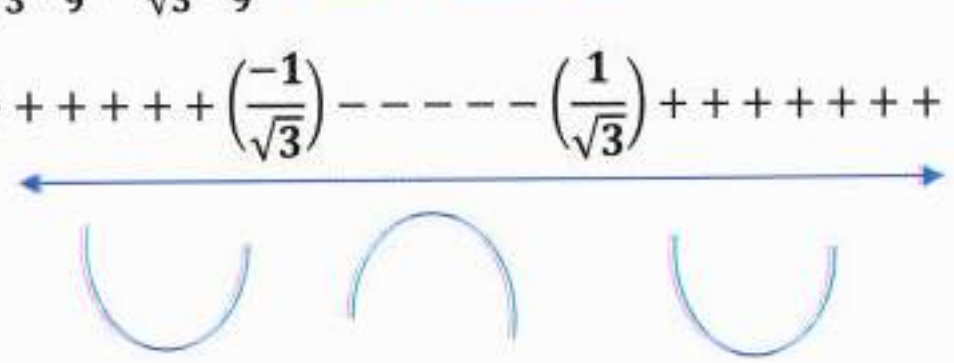
$F''(x)=12x^2-4=0 \rightarrow 12x^2=4$

$\rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$

$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$

نقطة انقلاب مرشحة $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$

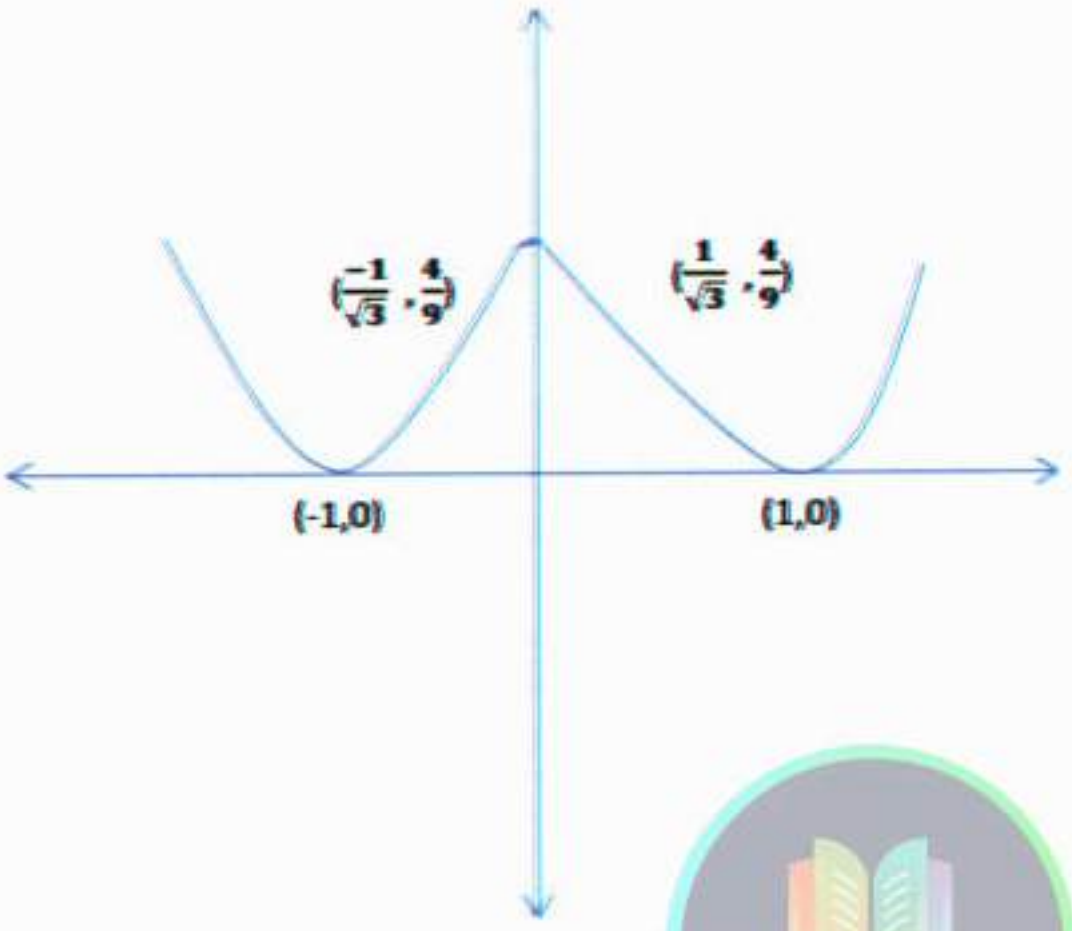


الدالة محدبه بالفترة $\{x:x\in R;x\in(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R;x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R;x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\}$

نقطة انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$



سكة المساعد
@SadsHelp

(2/2001)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^3 + 3x^2$

sol :

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

if $x = 0 \rightarrow y = 0$,

if $y = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x+3) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \ , x = -3$

$(0,0), (-3,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$

$= -(-x^3 - 3x^2) \neq F(x)$ لا يوجد تناظر

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 3x^2 + 6x$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\rightarrow 3x(x+2) = 0$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0$, or $x = -2$

$\rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$

$(0,0), (-2,4)$ نقاط حرجة

$x < -2$	$(-2,0)$	$x > 0$

++++++++(-2)----------(0)+++++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x > 0\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x < -2\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x \in (-2,0)\}$

نهاية صغرى $(0,0)$, نهاية عظمى $(-2,4)$

$F''(x)= 6x + 6 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

$F(-1)= 2$ نعوض في الدالة الأصلية

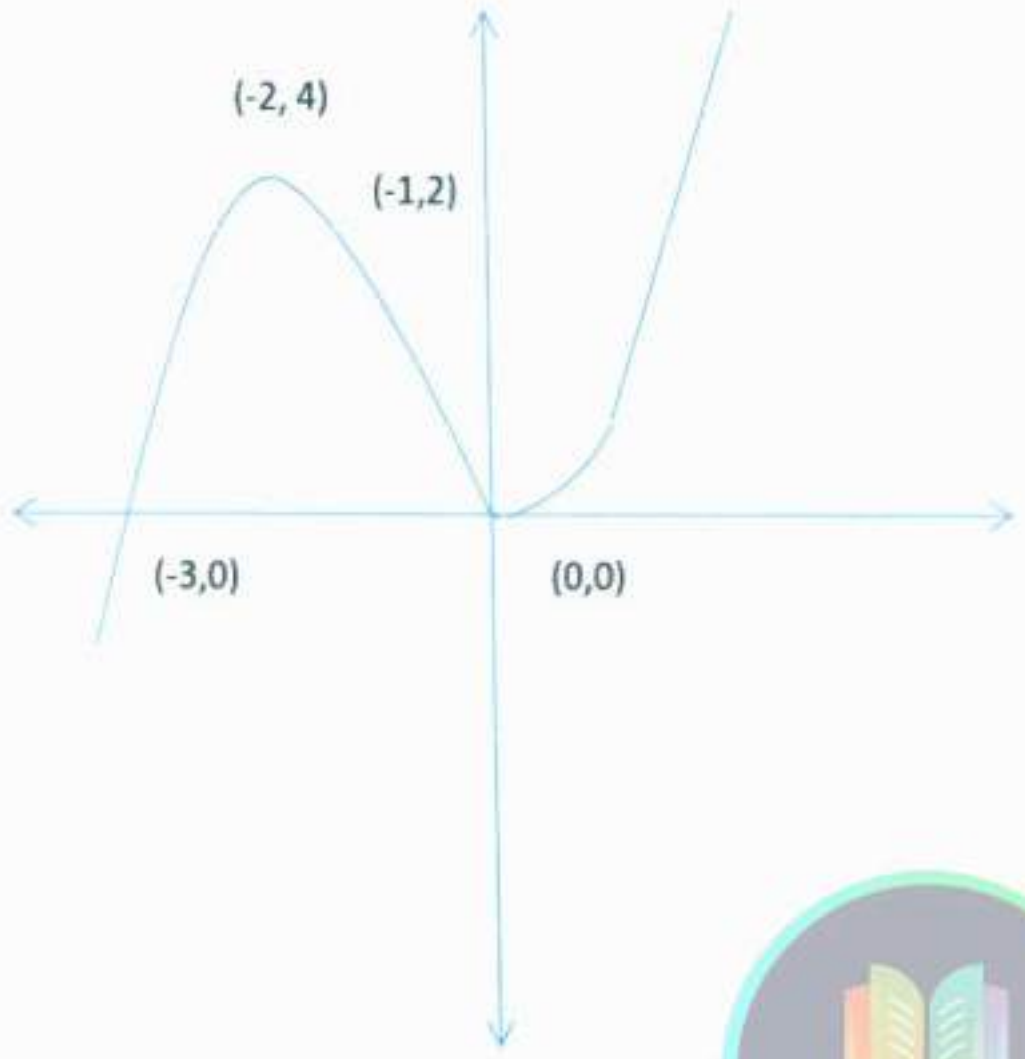
$(-1 ,2)$ نقطة انقلاب مرشحة

----------(-1)++++++++++

الدالة محدبه بالفترة $\{x:x \in R; x < -1\}$

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x:x \in R; x > -1\}$

نقطة انقلاب $(-1 , 2)$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(1/2002)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^2 - 2x - 3$

sol :

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$\text{if } x = 0 \rightarrow y = -3$

$\text{, if } y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$\rightarrow x = 3 \quad OR \quad x = -1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,-3),(3,0),(-1,0)$

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -F(x)$

$\rightarrow$ لا يوجد تناظر

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 2x - 2$

$\Rightarrow 2x - 2 = 0$

$\rightarrow x = 1$

$\rightarrow F(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

نقطة حرجة (1,-4)

$x < -2 \qquad x > -2$

$- - - - - - - - - -(1) + + + + + + + + + +$

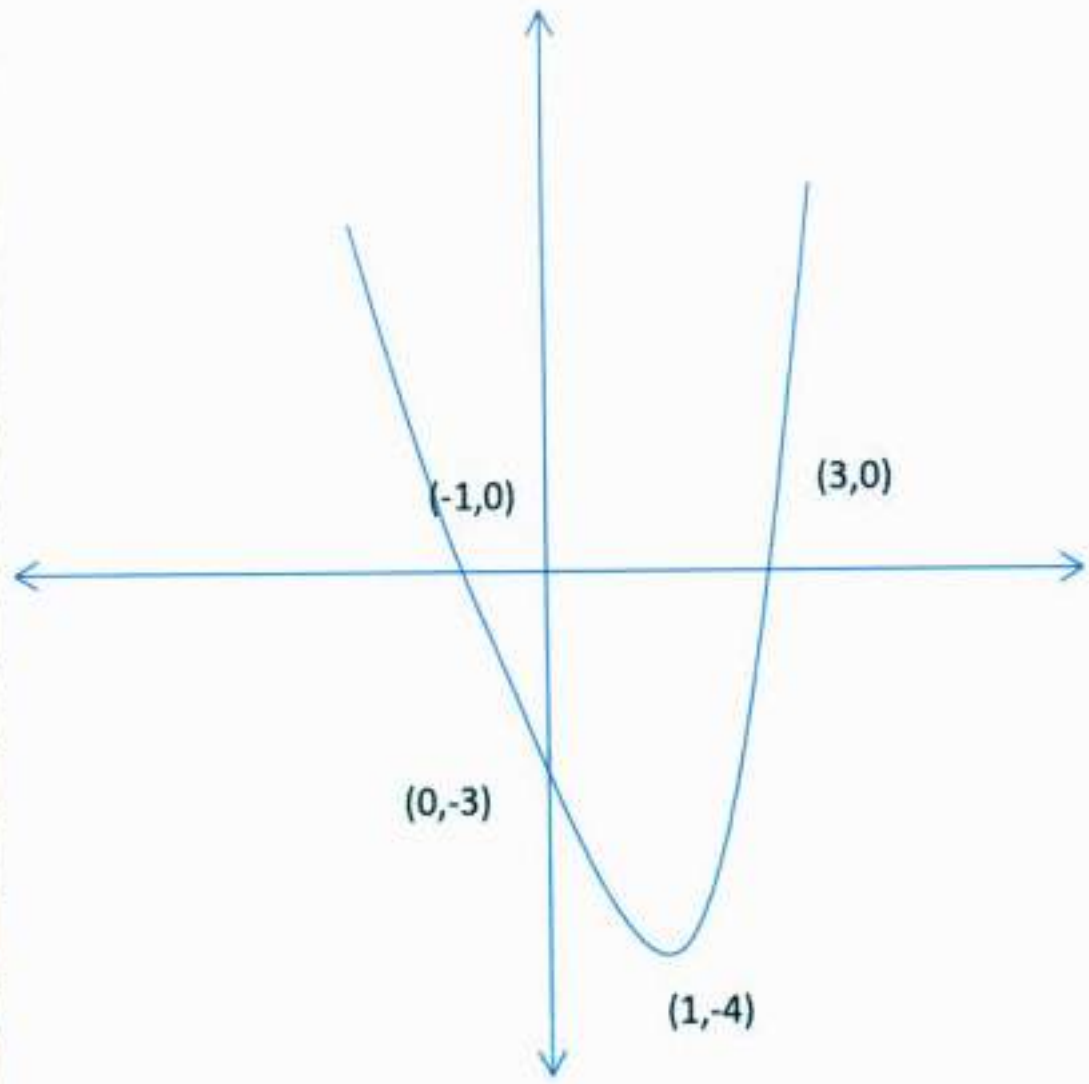
الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x > 1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x < 1\}$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1, -4)$

$F''(x)= 2 > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2005/"تمهيدي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^4 - 2x^2$

sol :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$\text{if } x = 0 \rightarrow y = 0$

$\text{, if } y = 0 \rightarrow x^4 - 2x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$

$\rightarrow x = 0, x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$(0,0),(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = F(x)$

المنحني متناظر حول محور الصادات ←

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 4x^3 - 4x$

$\Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$

$\rightarrow x = 0$

نعوض في الدالة الاصلية

$f(0) = 1$

$OR\ X = 1$

$\rightarrow F(1) = -1$

$OR\ X = -1$

$\rightarrow F(-1) = -1 \quad OR\ X = 1 \quad \rightarrow F(-1) = -1$

$(0,0),(-1,-1),(1,-1)$ نقاط حرجة

$x< -1 \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad x > 1$

$----(-1)++++(0)----(1)++++++$

$\{x: x \in R; x \in (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$ الدالة محدبه بالفترة

$\{x: x \in R; x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\{x: x \in R; x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ نقطة انقلاب

$\{x: x \in R; x > 1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x < -1\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x: x \in R; x \in (-1,0)\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x \in (0,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(-1,-1)$ نهاية صغرى ,

$(1,-1)$ نهاية صغرى

$(0,0)$ نهاية عظمى

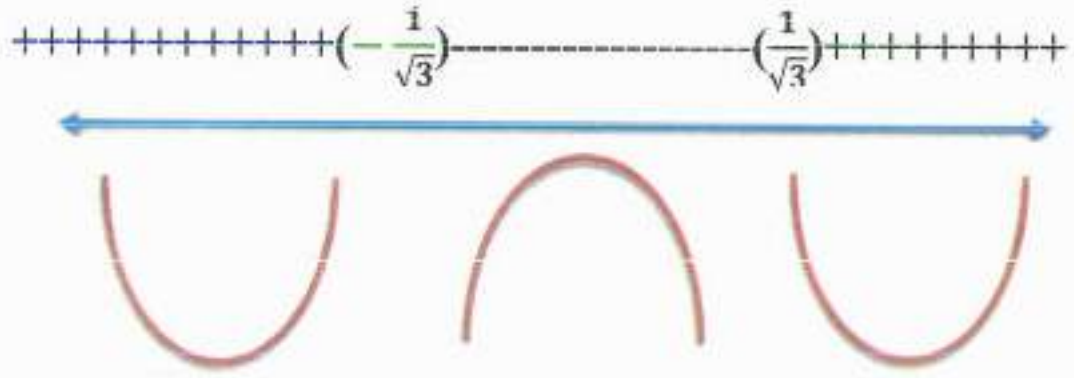
$F''(x)= 12x^2 - 4 = 0$

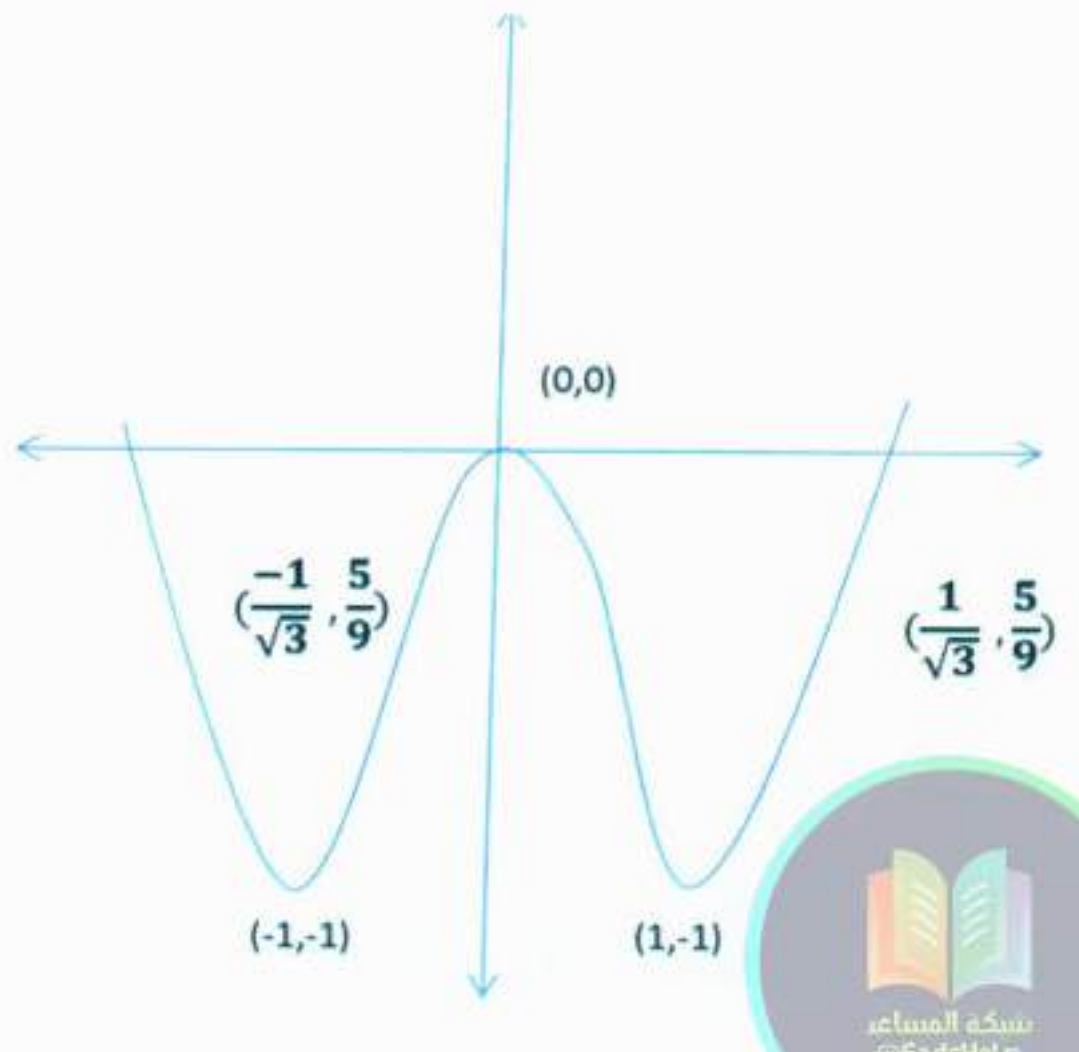
$\rightarrow 12x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$ نعوض في الدالة الأصلية

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9})$ نقطة انقلاب مرشحة





شبكة المساعد
@SadsHelp

(1/2008) (1/2005)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(x+2)(x-1)^2$

sol :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$0=(x+2)(x-1)^2$

$\Rightarrow$ either $(x+1)=0 \Rightarrow x=-2$

$\therefore$ النقطة $(-2, 0)$ تقاطع مع السينات

Or $(x-1)^2 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ النقطة $(1, 0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)=(0+2)(0-1)^2=2$

$\therefore$ النقطة $(0, 2)$ تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x+2)(-x-1)^2 \neq F(x)$

الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$F(-x) \neq -F(x) \Rightarrow$

$\therefore$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5)

$F'(x)=(x+2)[2(x-1)(1)]+(x-1)^2(1)2$

$(x+2)(x-1)+(x-1)^2$

$\Rightarrow F'(x)=(x-1)[2x+4+x-1]$

$=(x-1)(3x+3) \Rightarrow 0=(x-1)(3x+3)$

either $x-1=0 \Rightarrow x=1$, or $(3x+3)=0$

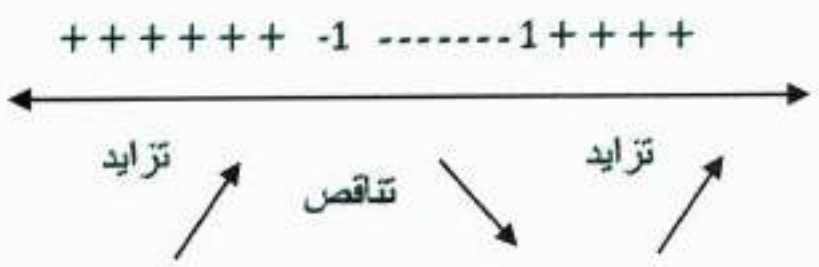
$\Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$

$F(-1)=(-1+2)(-1-1)^2=1(4)=4$

$\therefore$ النقطة $(-1, 4)$

$F(1)=(1+2)(1-1)^2=3(0)=0$

$\therefore$ النقطة $(1, 0)$



F متزايدة في $\{x: x>1\}, \{x: x<-1\}$

F متناقصة في $(-1, 1)$

$\therefore$ النقطة $(-1, 4)$ نهاية عظمى محلية للدالة.

$\therefore$ النقطة $(1, 0)$ نهاية صغرى محلية للدالة.

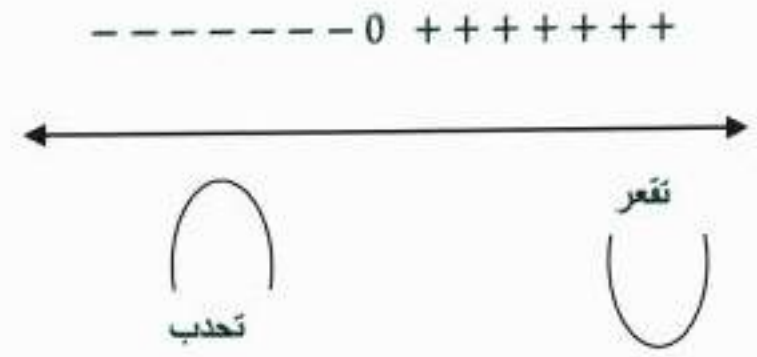
$F''(x)=(x-1)(3)+(3x+3)(1)$

$=3x-3+3x+3$

$\therefore F''(x)=6x \Rightarrow 0=6x \Rightarrow x=0$

$F(0)=(0+2)(0-1)^2$

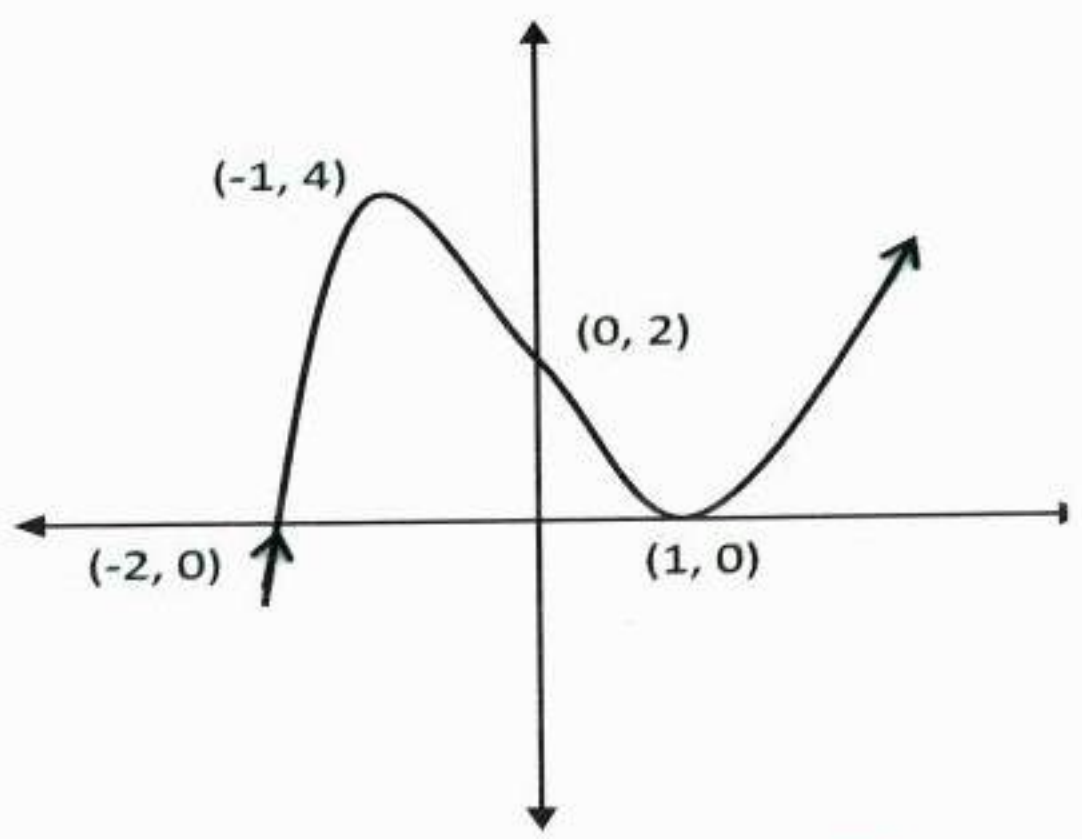
$=2(1)=2$ $\therefore$ النقطة $(0, 2)$ نعوض في الدالة الاصلية



الدالة محدبه بالفترة $\{x: x \in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x>0\}$

$\therefore$ النقطة $(0, 2)$ نقطة انقلاب



شبكة المساعد
@SadsHelp

(1/2006)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x+2$

sol :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

if $x=0 \rightarrow y=2$,

if $y=0 \rightarrow x^3-3x+2=0$

$\rightarrow (x+2)(x-1)^2=0$

$\rightarrow x=-2$ OR $x=1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,2)\ ,(-2,0),(1,0)$

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-x+2=-x^3+3x+2$

$=-(x^3-3x-2) \neq -F(x)$

الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل ولا حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات

$F'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-3=0$

$\rightarrow 3x^2=3$

$\rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

نعوض في الدالة الاصلية $F(1)=(1)^3-3(1)+2=0$

$F(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

$x<-1$	$(-1,1)$	$x>1$

$+++++++-1-------1+++++++$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x \in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x \in (-1,1)\}$

صغرى $(1,0)$, نهاية عظمى $(-1,4)$

$F''(x)=6x$

$\rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$

نعوض في الدالة الأصلية $F(0)=6(0)$

نقطة انقلاب مرشحة $(0,0)$

$x<0$	$x>0$

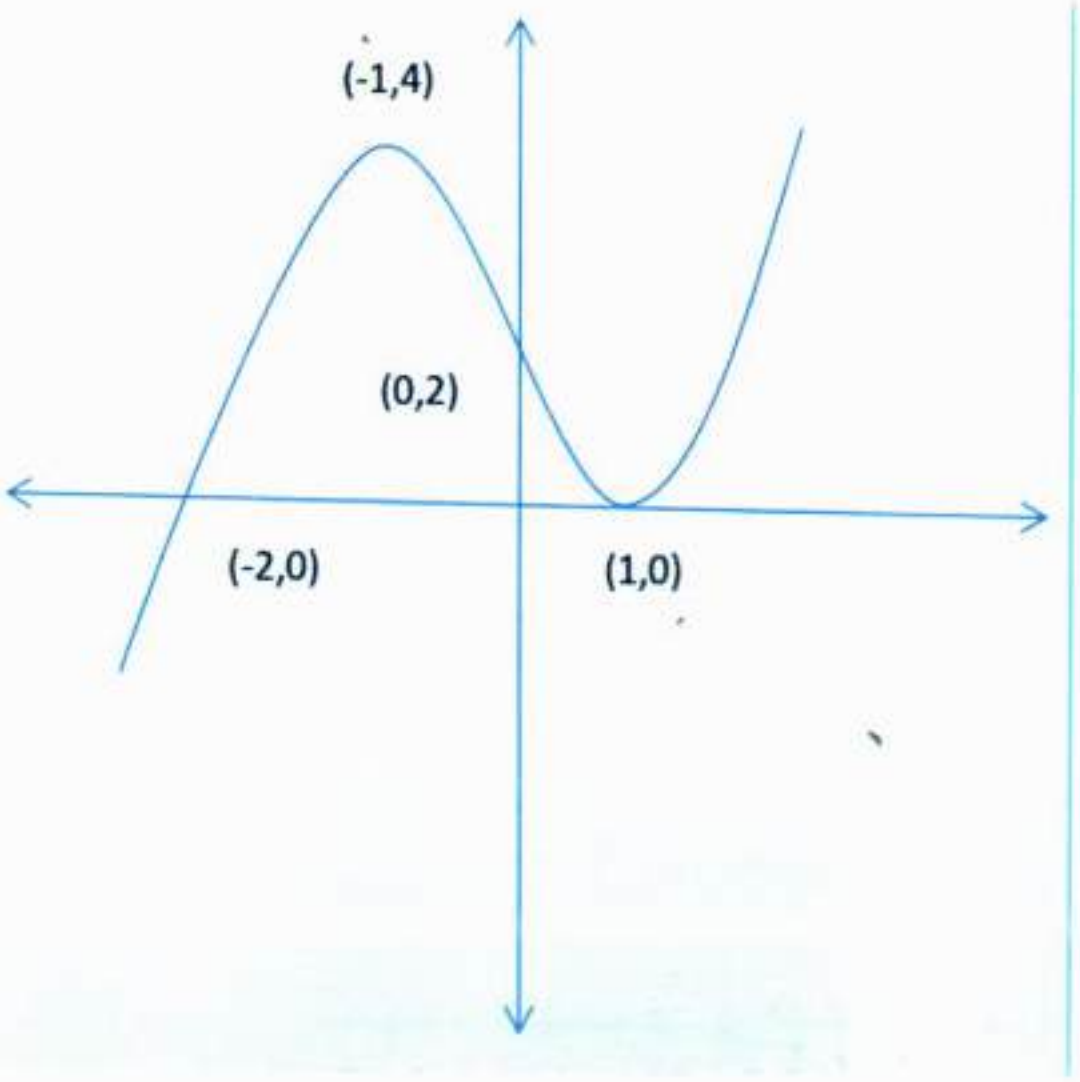
اشارة المشتقة الثانية

$-------0+++++++$

الدالة محدبة بالفترة $\{x:x \in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x \in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,2)$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2009/"تمهيدي")

(1/2014"خارج القطر")

باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{1}{x+1}$

sol :

1) أوسع مجال للداله $x = 0$ ناخذ المقام ونجعله = صفر

∴ أوسع مجال للدالة = $R/\{-1\}$

2) التقاطع مع المحورين

if $x = 0 \rightarrow y = 1$

if $y = 0$ غير ممكن

نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0,1)$

3) التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

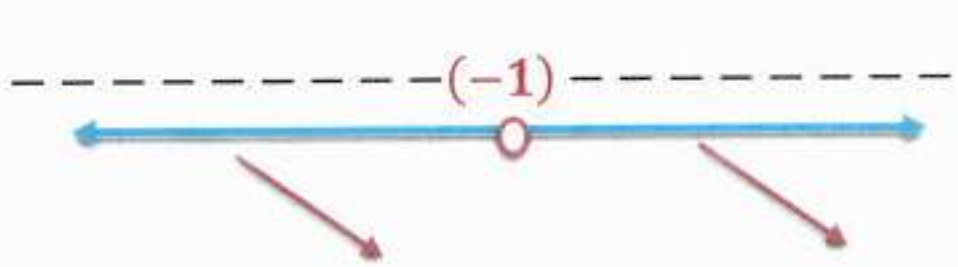
بما ان (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد(1-) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية:

المحاذي الافقي $y = 0$, المحاذي العمودي $X= -1$

5)النهايات

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0$ اي انه لاتوجد نقاط حرجة



الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x > 1\}$

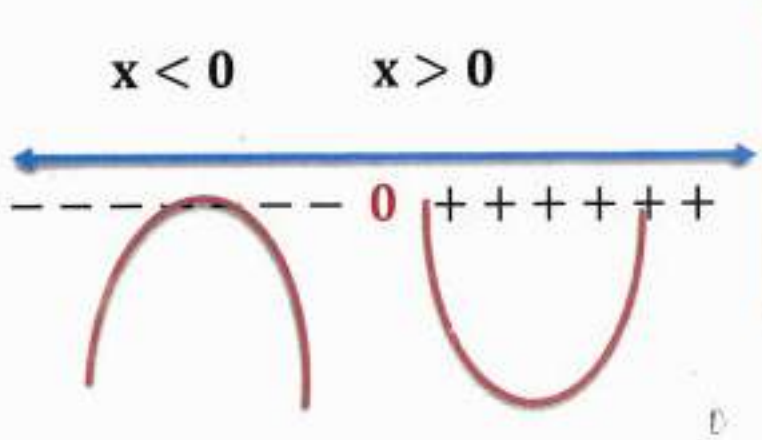
الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x < -1\}$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2.(0) + 1[2(x+1)]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$$

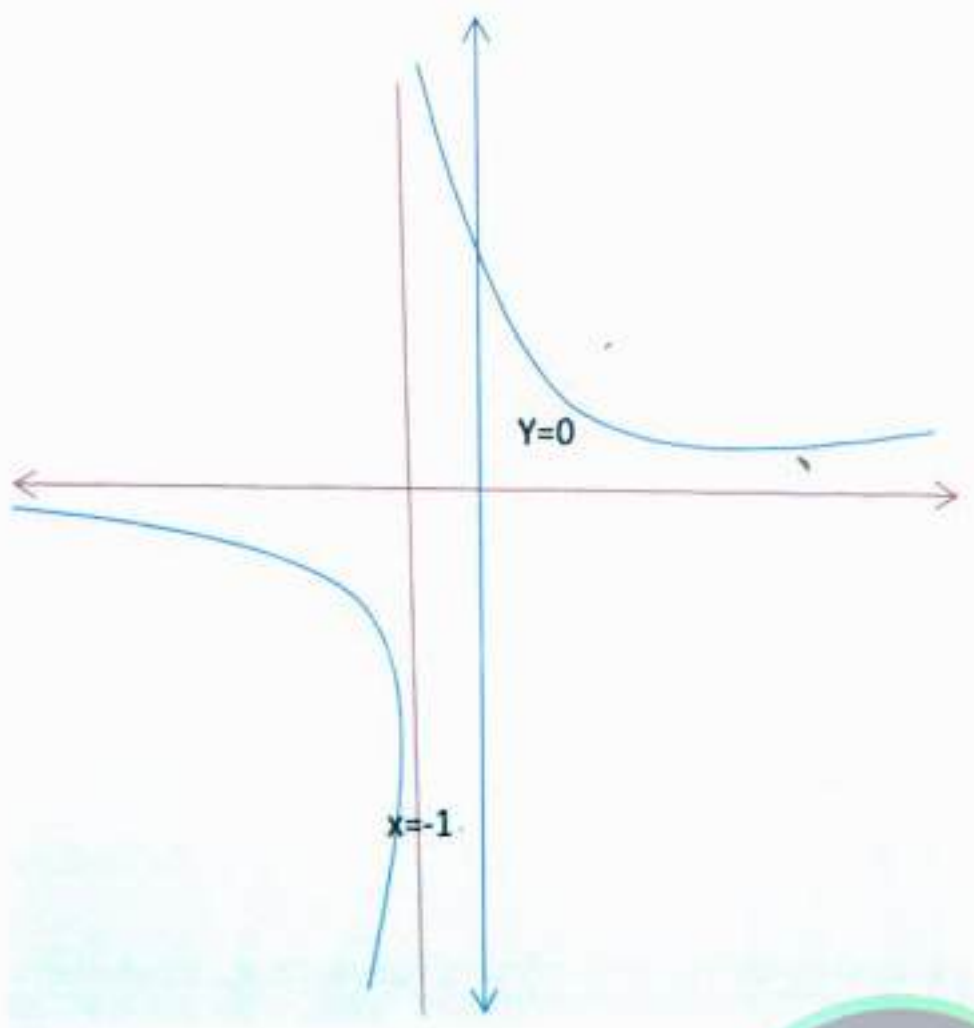
اي انه لا توجد نقاط انقلاب

اشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x:x \in R; x > -1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x \in R; x < -1\}$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(3/2015) (1/2011)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=6x-x^3$

sol :

1. أوسع مجال للدالة = R

2. التقاطع مع المحورين

$0 = 6x - x^3 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$

either $x=0$ ∴ النقطة $(0, 0)$

or $6 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 6$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$, $(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$ ∴ النقطتان

∴ النقاط $(0, 0)$ $(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)= 6(0) - (0)^3 = 0$

∴ النقطة $(0, 0)$ تقاطع مع محور الصادات

3. التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3$

$= -(6x-x^3) = -F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4. المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5.

$F'(x)= 6 - 3x^2$

$\Rightarrow 0 = 6 - 3x^2$

$\Rightarrow 3x^2 = 6$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

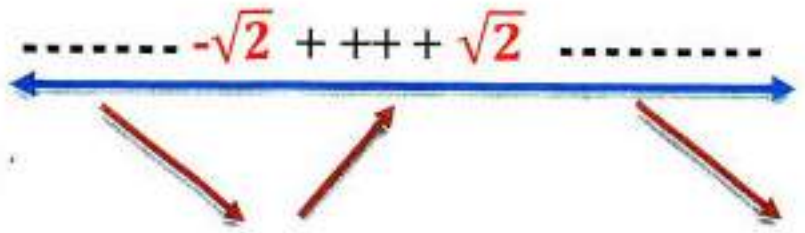
$F(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3$ نعوض في الدالة الاصلية

$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

∴ النقطة $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

$F(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

∴ النقطة $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$



الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x > \sqrt{2}\}, \{x: x \in R; x < -\sqrt{2}\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

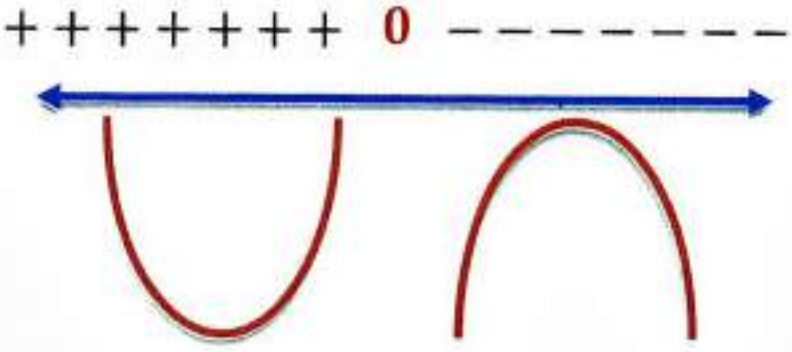
∴ النقطة $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نهاية صغرى محلية للدالة.

∴ النقطة $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نهاية عظمى محلية للدالة.

$F''(x)=-6x$

$\Rightarrow 0 = -6x \Rightarrow x = 0$

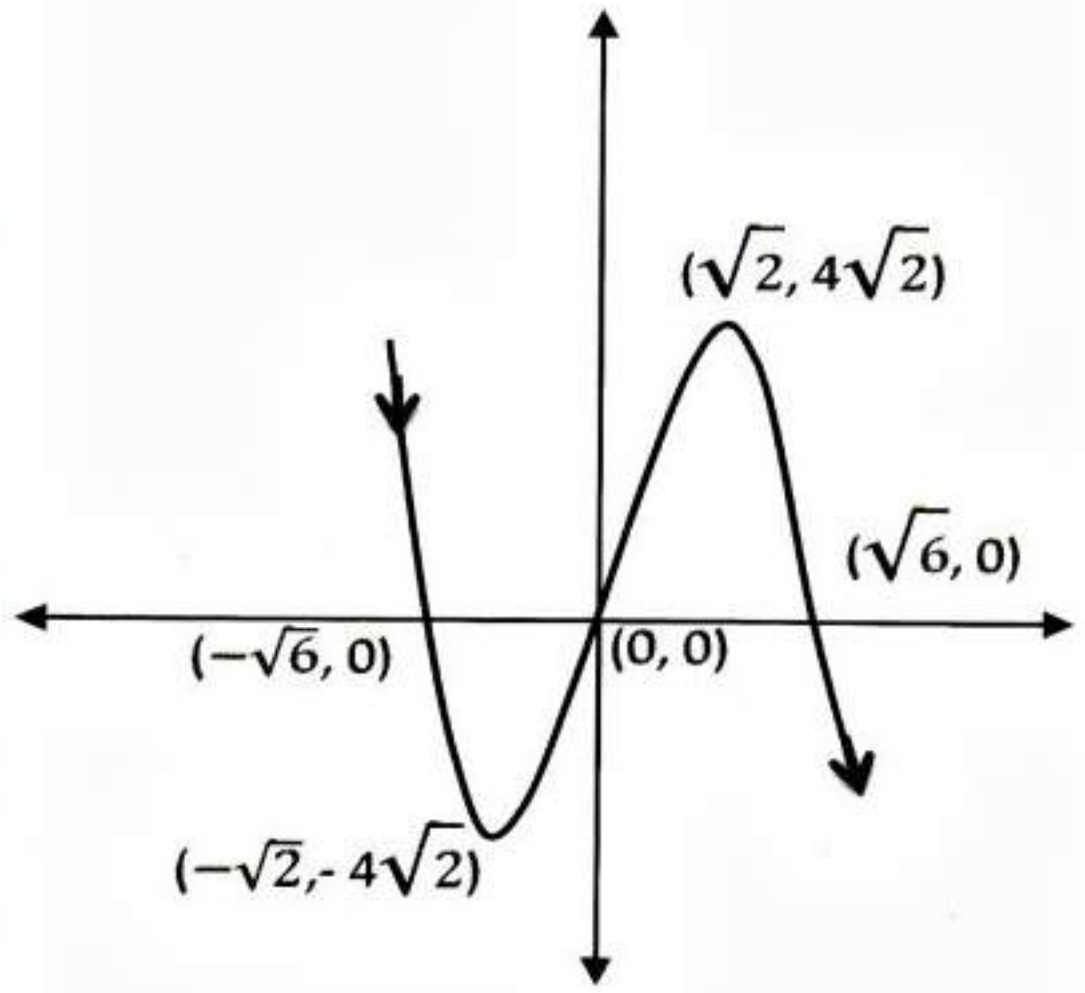
$F(0)=-6(0)- (0)^3$ نعوض في الدالة الأصلية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x > 0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x < 0\}$

∴ النقطة $(0, 0)$ نقطة انقلاب



(2/2013) | (2/2011) | (2016/"تمهيدي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(1-x)^3+1$

sol :

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=(1-x)^3+1$

$\Rightarrow (1-x)^3=-1$

$\Rightarrow 1-x=-1 \Rightarrow x=2$

∴ النقطة (2, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)=(1-0)^3+1=2$

∴ النقطة (0, 2) تقاطع مع الصادات

3) التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(1-(-x))^3+1=(1+x)^3 \neq F(x)$

⇒ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$\Rightarrow F(-x) \neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5)

$F'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$

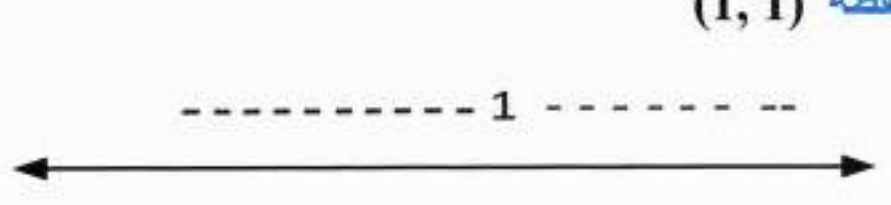
$\Rightarrow [0=-3(1-x)^2] \div (-3)$

$\Rightarrow (1-x)^2=0$

$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1=1$ نعوض في الدالة الاصلية

∴ النقطة (1, 1)



الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x \in R; x>1\}, \{x: x \in R; x<1\}$

∴ النقطة (1, 1) نقطة حرجة فقط للدالة

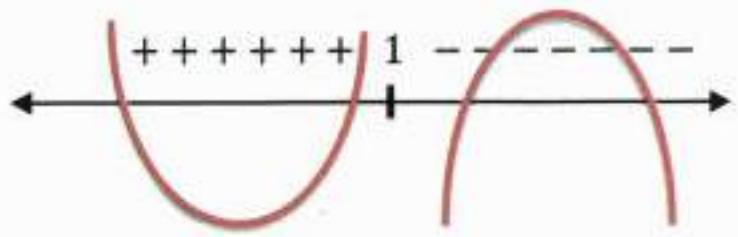
$F''(x)=-6(1-x)(-1)=6(1-x)$

$\Rightarrow [0=6(1-x)] \div 6 \Rightarrow 1-x=0$

$\Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1$ نعوض في الدالة الاصلية

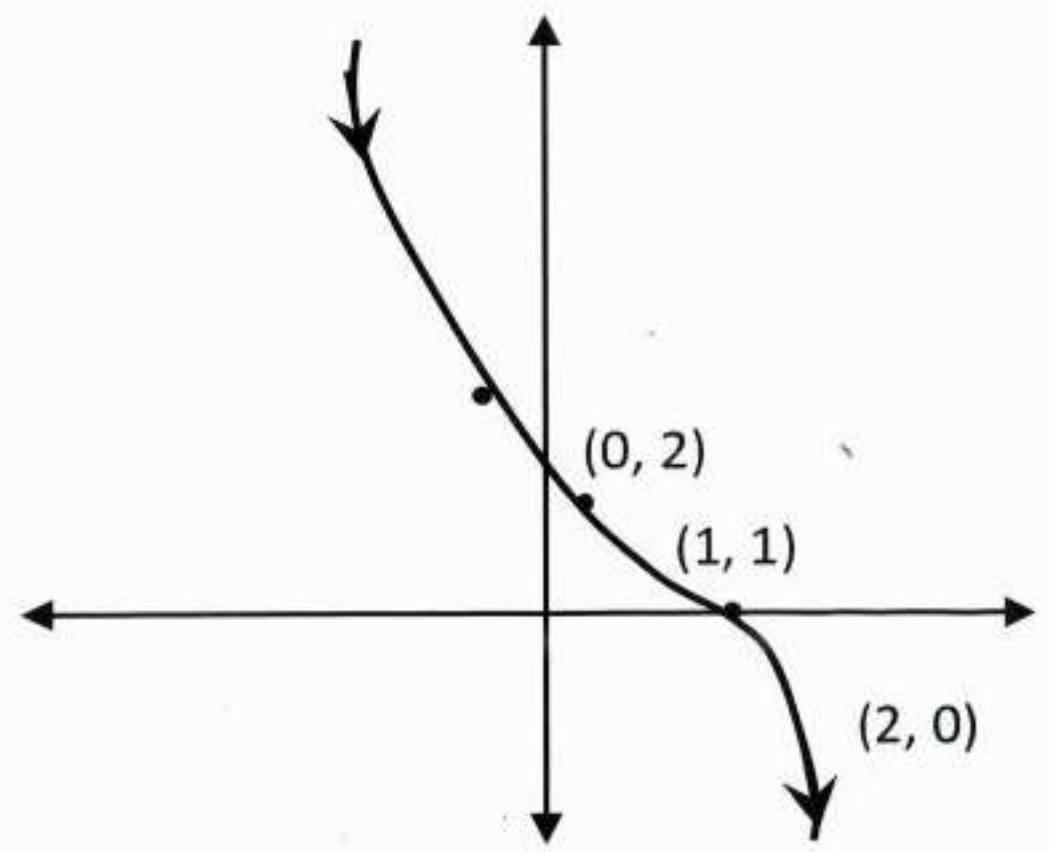
∴ النقطة (1, 1)



الدالة محدبة بالفترة $\{x:x \in R; x>1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x \in R; x<1\}$

∴ النقطة (1, 1) نقطة انقلاب



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2012/"تمهيدي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{1}{x}$

sol :

1) أوسع مجال للدالة $x=0$ ناخذ المقام ونجعله = صفر

∴ أوسع مجال للدالة $= R/\{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{1}{x} \Rightarrow 0=1$ (غير ممكن)

∴ لا يوجد تقاطع مع محور السينات

$F(0)=\frac{1}{0}$ لا يوجد تقاطع مع محور الصادات (كمية غير معروفة)

3) التناظر

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

تجعل y غير معرفة $X=0$

(محور الصادات) معادلة المحاذي العمودي $\therefore x=0$

المحاذي الافقي: $y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y}, y=0$

تجعل x غير معرفة $y=0$

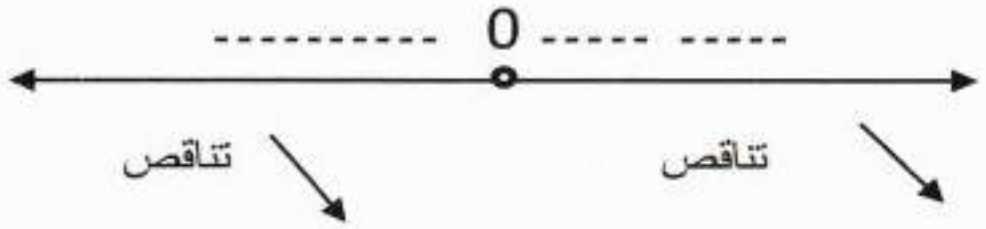
(محور السينات) معادلة المحاذي الافقي $\therefore y=0$

$F(x)=x^{-1} \Rightarrow F'(x)=-x^{-2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x^2}$

$0=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow 0=-1$ (غير ممكن)

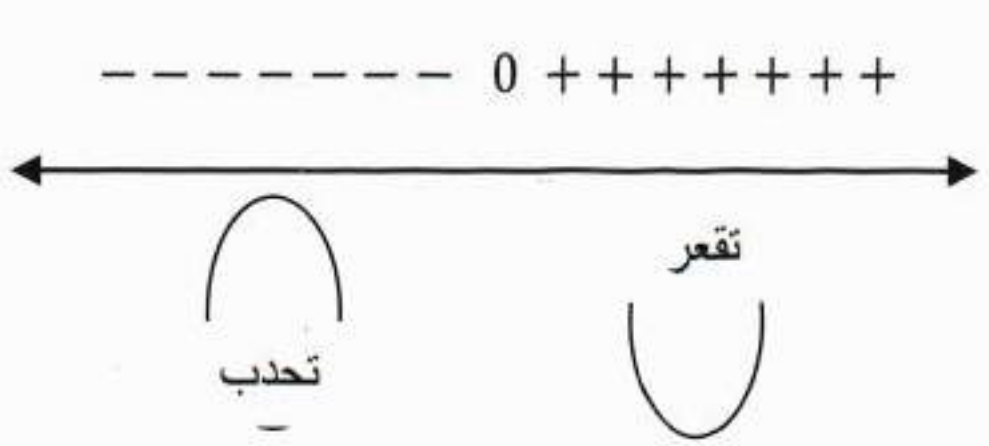
$x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin$ للمجال



∴ لا توجد نقاط حرجة $\{x: x<0\}, \{x: x>0\}$ F متناقصة في

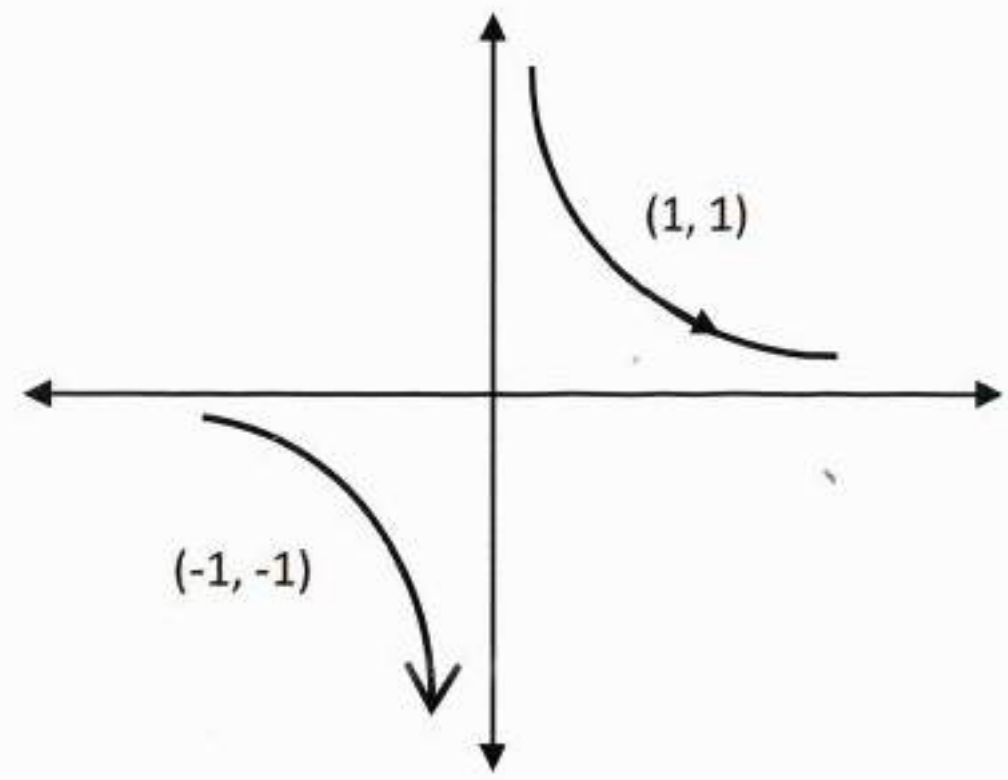
$F''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3} \Rightarrow (0=2)$ غير ممكن

ناخذ المقام ونجعله = صفر للمجال $x^3=0 \Rightarrow x=0 \notin$



F محدبة في $\{x: x<0\}$

F مقعرة في $\{x: x>0\}$ لا توجد نقاط انقلاب



(2/2012) | (1/2017 "أسئلة الموصل")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 2x^2 - x^4$

sol :

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0 = 2x^2 - x^4 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0$

either $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

∴ النقطة $(0, 0)$

or $2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

∴ النقطتان $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

∴ النقاط $(0, 0)$ $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ تقاطع مع السينات

$F(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$

∴ النقطة $(0, 0)$ تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المحاذيات لا توجد لان الدالة غير نسبية

5) النهايات

$F'(x) = 4x - 4x^3$

$\Rightarrow (0 = 4x - 4x^3) \div 4$

$\Rightarrow x - x^3 = 0$

$\Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

Either $x = 0$ or $1 - x^2 = 0$

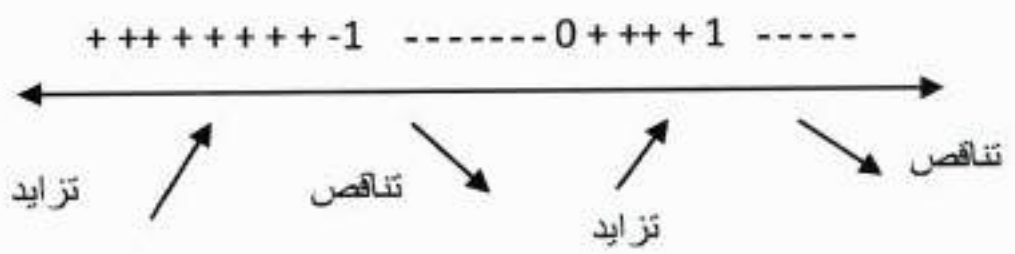
$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$F(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$

∴ النقطة $(-1, 1)$

∴ النقطة $(0, 0)$ $F(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$

∴ النقطة $(1, 1)$ $F(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 1$



F متناقصة في $\{x: x > 1\}, (-1, 0)$

F متزايدة في $\{x: x < -1\}$ $(0, 1)$

∴ النقطة $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ نهاية عظمى محلية للدالة.

∴ النقطة $(0, 0)$ نهاية صغرى محلية للدالة.

$F''(x) = 4 - 12x^2$

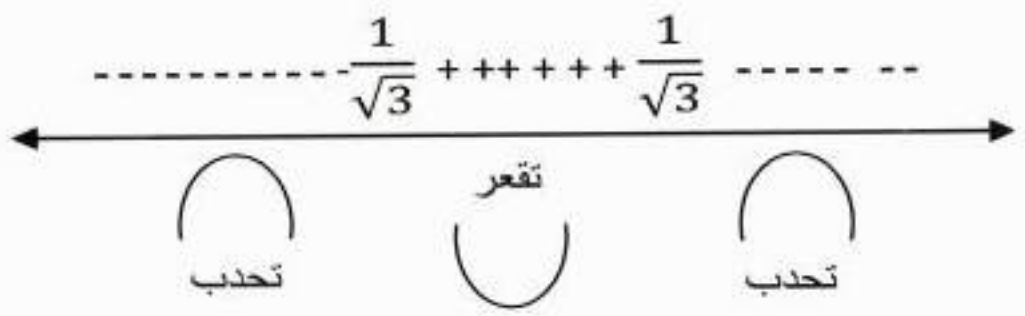
$\Rightarrow 0 = 4 - 12x^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}$

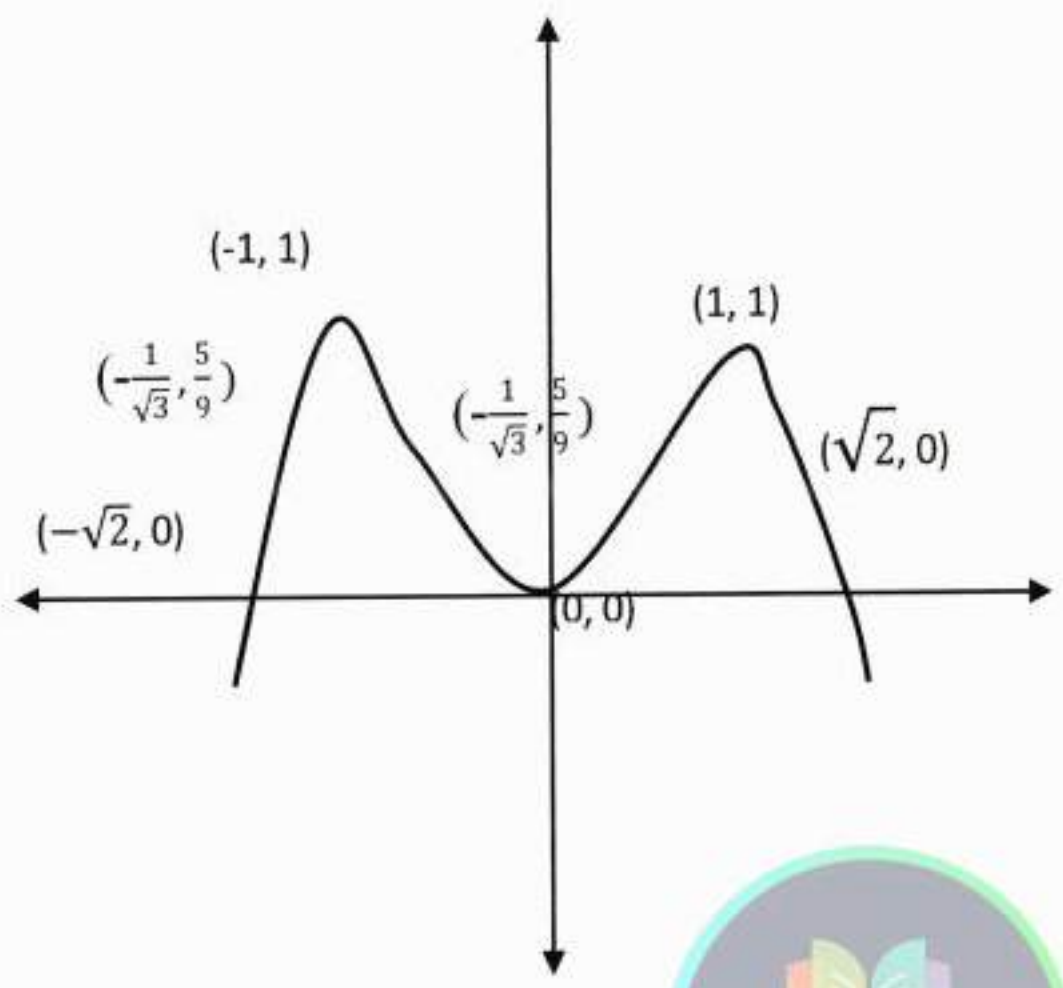
∴ النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



F محدبة في $\{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

F مقعرة في $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

∴ النقطتان $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ نقطتا انقلاب



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2013/"تمهيدي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 10 - 3x - x^2$

sol :

1)أوسع مجال للدالة $R =$

2) التقاطع مع المحورين

$0 = 10 - 3x - x^2 \Rightarrow (5 + x)(2 - x) = 0$

either $5 - x = 0 \Rightarrow x = -5$ $(-5, 0)$ النقطة ∴

or $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$ $(2, 0)$ النقطة ∴

نقاط تقاطع مع محور السينات $(-5,0)\ (2, 0)$.

$F(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10$

∴ النقطة $(0, 10)$ نقطة التقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2$

$= 10 + 3x - x^2 \neq F(x)$

⇒ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$F(-x) \neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات

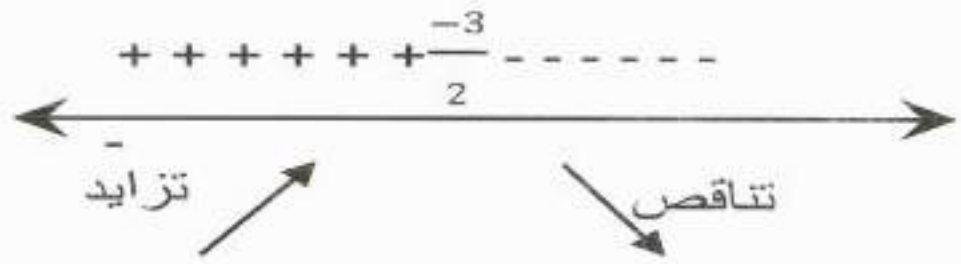
$F'(x) = -3 - 2x$

$\Rightarrow 0 = -3 - 2x$

$\Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

∴ $f(\frac{-3}{2}) = 10 - 3(\frac{-3}{2}) - (\frac{-3}{2})^2$ نعوض في الدالة الاصلية

$= 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$



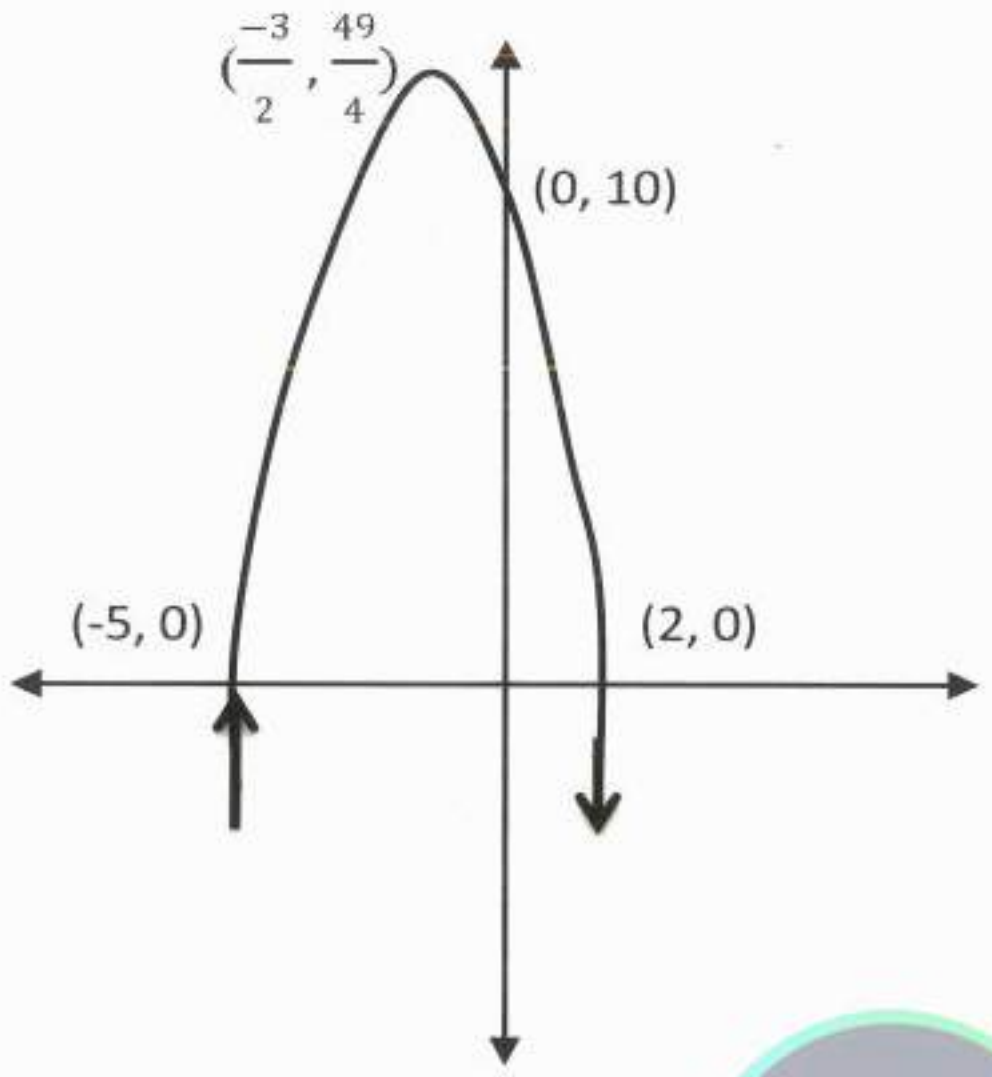
F متزايدة في $\{x: x < \frac{-3}{2}\}$

F متناقصة في $\{x: x > \frac{-3}{2}\}$

∴ النقطة $(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4})$ نهاية عظمى محلية للدالة

∴ الدالة محدبة في R $F''(x) = -2 < 0$

لا توجد نقاط انقلاب



سكة المساعد
@SadsHelp

(3/2014)

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{3}{x^2}$

sol :

1) أوسع مجال للدالة $\mathbf{R/\{0\}}$

2) التقاطع مع المحورين

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين لان

محاذي $\mathbf{x=0}$

محاذي $\mathbf{y=0}$

3) التناظر

$$\forall\, x \in R/[0] \exists\, (-x) \in R/[0]$$

$$f(-x)=\frac{3^0}{(-x)^2}=\frac{3}{x^2}=f(x)$$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية:

المحاذي الافقي $y=0$, المحاذي العمودي $X=0$

5)النهايات

$$f'(x)=-6x^{-3}=\frac{-6}{x^3}\neq 0$$ اي انه لاتوجد نقاط حرجة

+ + + + + + O - - - - - -

تزايد ↗ ↘ تناقص

$\{x:x\in R;x<0\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x:x\in R;x>0\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$$f''(x)=18x^{-4}=\frac{18}{x^4}\neq 0$$

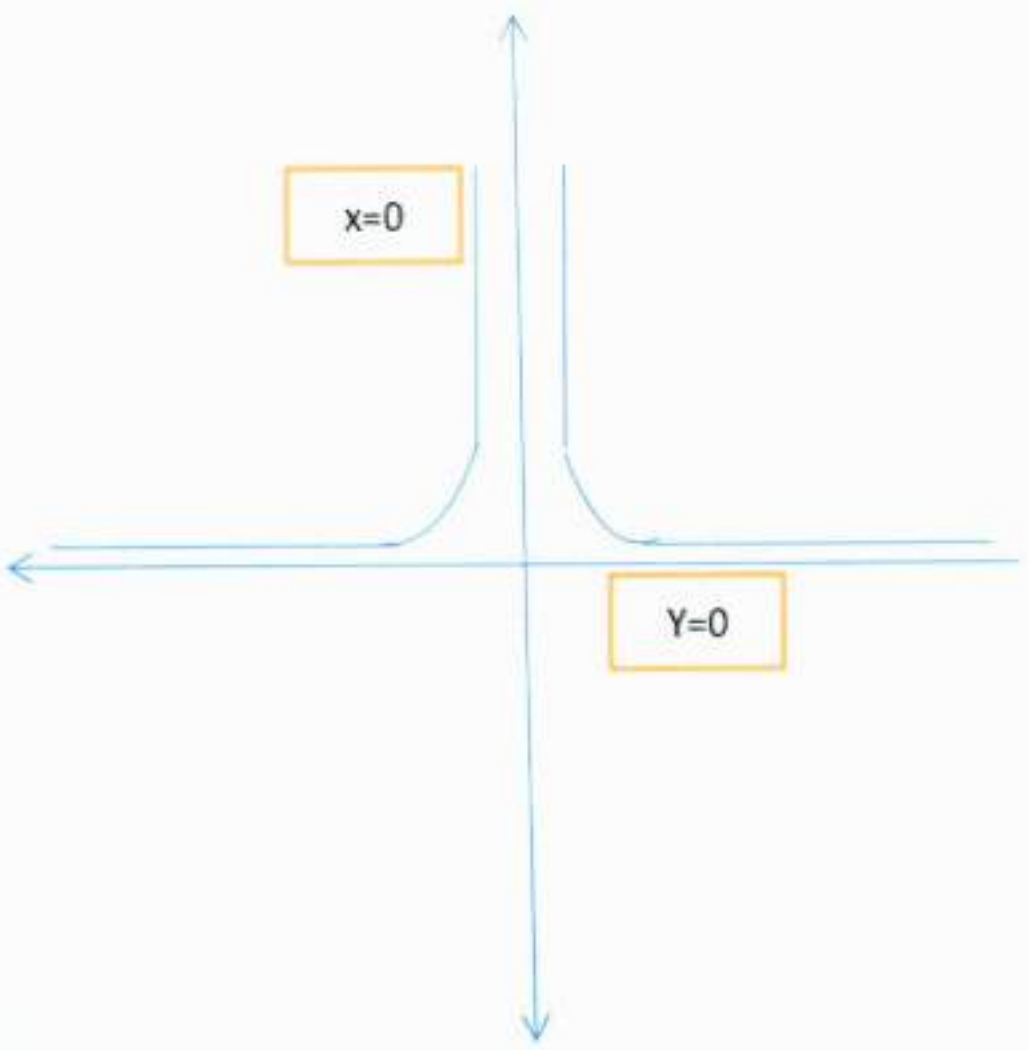
∴ لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية

++++++++++++ 0 + ++ + ++++++

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x:x\in R;x>0\}$

$\{x:x\in R;x<0\}$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2015/"تمهيدي")	(3/2019"تطبيقي")	(2023/تمهيدي"أحيائي")	(2023/تمهيدي"تطبيقي")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

sol :

1) أوسع مجال للدالة $\mathbf{R} =$

2) التقاطع مع المحورين

$\mathbf{x = 0 \Rightarrow y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4}$

$\therefore$ النقطة $\mathbf{(0, 4)}$

3) التناظر:

$\mathbf{\forall\, x \in R/[0] \exists\, (-x) \in R/[0]}$

$\mathbf{f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4}$

$\mathbf{\therefore f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)}$

∴لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست كسرية.

5) النهايات

$\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 6x}$

$\mathbf{f'(x) = 0}$

$\mathbf{\rightarrow [3x^2 - 6x = 0] \div 3}$

$\mathbf{x^2 - 2x = 0}$

$\mathbf{\rightarrow x(x - 2) = 0}$

$\mathbf{x = 0 \ \rightarrow y = 4}$

$\mathbf{x = 2}$

$\mathbf{\rightarrow y = (2)^3 - 3(2)^2 + 4}$

$\mathbf{= 8 - 12 + 4 = 0}$

$\therefore$ نقاط حرجة $\mathbf{(2, 0)}$, $\mathbf{(0, 4)}$

+ + + + + +0 − − − −2 + + + + + + +

تزايد ↗ تناقص ↘

مناطق التزايد $\mathbf{\{x: x < 0\}}$,$\mathbf{\{x: x > 2\}}$

مناطق التناقص $\mathbf{(0, 2)}$

نهاية عظمى محلية$\mathbf{(2, 0)}$, نهاية عظمى محلية$\mathbf{(0, 4)}$

$\mathbf{f''(x) = 6x - 6}$

$\mathbf{f''(x) = 0}$

$\mathbf{\rightarrow [6x - 6 = 0] \div 6}$

$\mathbf{x - 1 = 0}$

$\mathbf{\rightarrow x = 1 \ \rightarrow y = (1)^3 - 3(1)^2 + 4}$

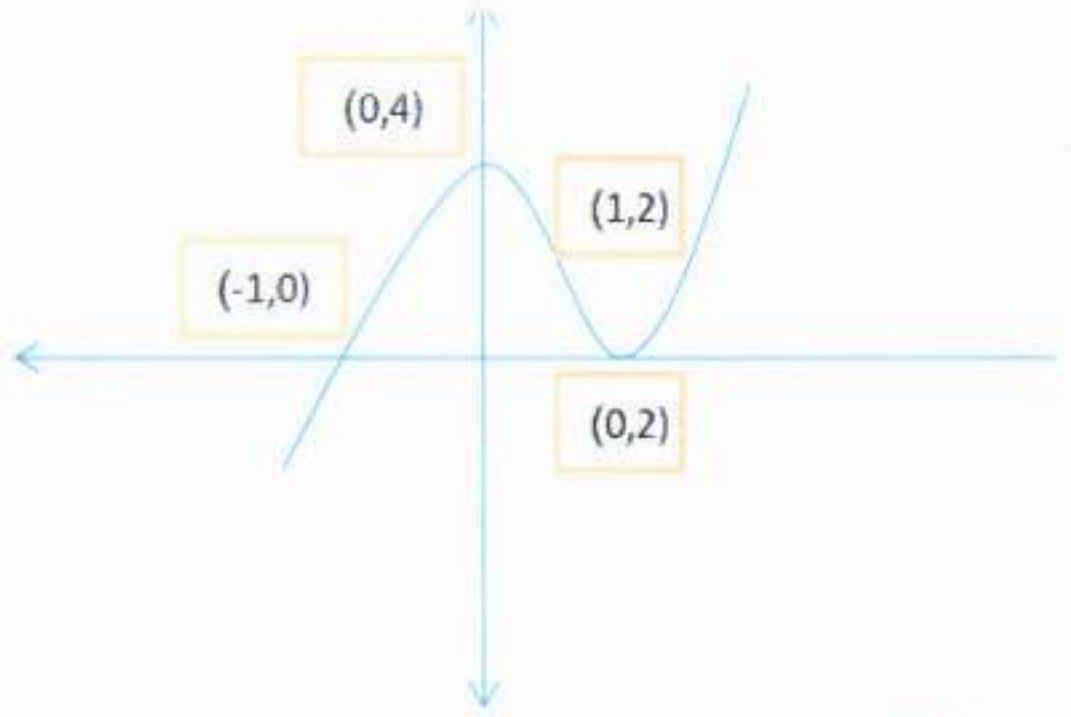
$\mathbf{1 - 3 + 4 = 2}$ $\therefore$ النقطة $\mathbf{(1, 2)}$

− − − − −0 + + + + + + + +

مناطق التقعر $\mathbf{\{x: x > 1\}}$

مناطق التحدب $\mathbf{\{x: x < 1\}}$

نقطة انقلاب $\mathbf{(1, 2)}$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2/2015"خارج القطر")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{6}{x^2+3}$

sol :

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0 = \frac{6}{x^2+3} \Rightarrow 6 = 0$ (غير ممكن)

∴ الدالة لا تقطع محور السينات

$F(0) = \frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2$

∴ النقطة (0, 2) تقاطع مع الصادات

3) التناظر:

$F(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+3 \neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي:

$y = \frac{6}{x^2+3}$

$\Rightarrow yx^2 + 3y = 6$

$\Rightarrow yx^2 = 6 - 3y \Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y}$

$y = 0$ تجعل x غير معرفة

∴ y=0 (محور السينات) معادلة المحاذي الافقي

5) النهايات

$F(x) = 6(x^2+3)^{-1}$

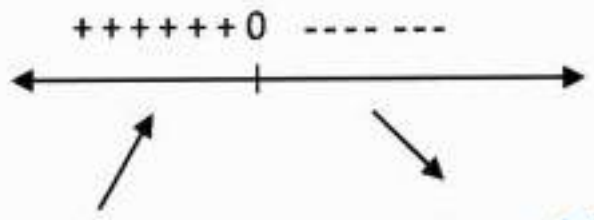
$\Rightarrow F'(x) = -6(x^2+3)^{-2}(2x)$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow 0 = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0) = \frac{6}{(0)^2+3} = 2$ النقطة (0, 2)



F متناقصة في {x: x >0}

F متزايدة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, 2) نهاية عظمى محلية للدالة

$F''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12)+12x[(2)(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow \frac{-12(x^2+3)^2 + 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow F''(x) = \frac{(x^2+3)[-12x^2 - 36 + 48x^2]}{(x^2+3)^4}$

$= \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 0 = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$

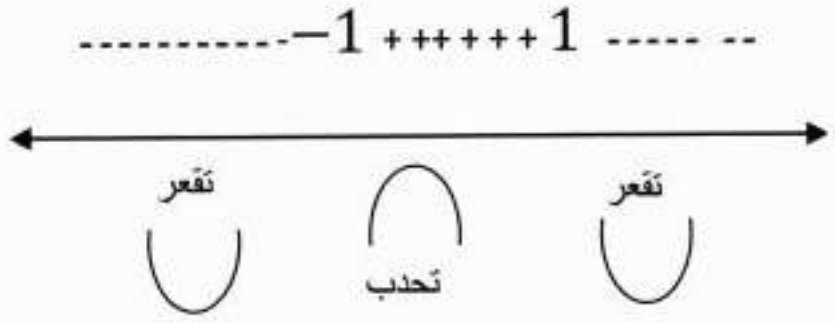
$\Rightarrow 36x^2 = 36$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$F(-1) = \frac{6}{(-1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(-1, \frac{3}{2})$

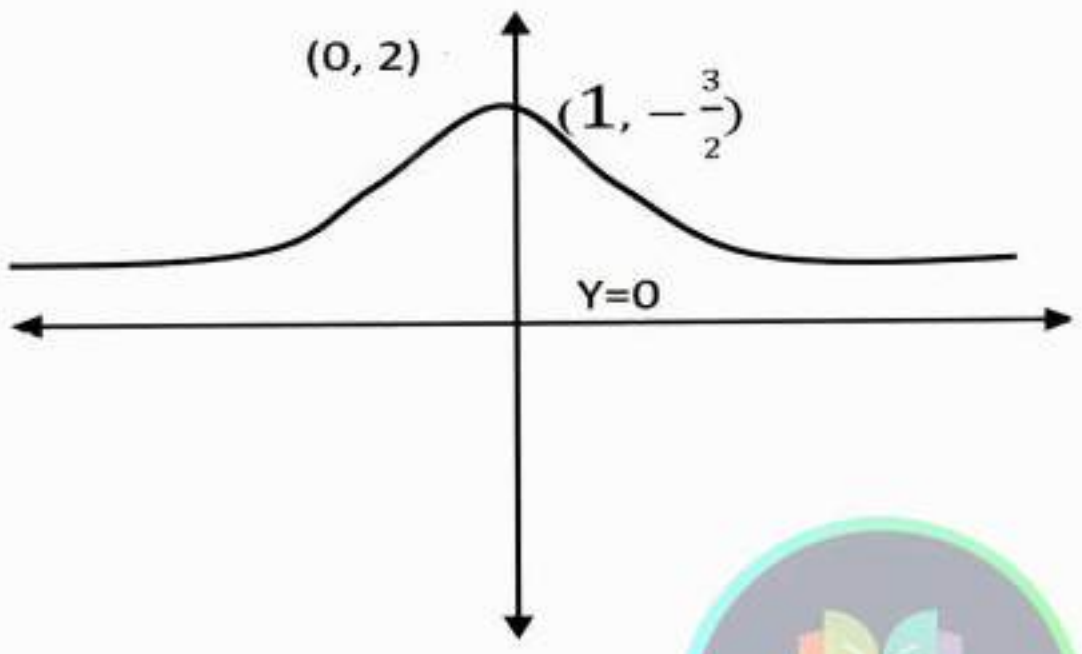
$F(1) = \frac{6}{(1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(1, \frac{3}{2})$



F مقعرة في {x: x <-1} و {x: x >1}

F محدبة في (-1, 1)

∴ النقطتان $(1, \frac{3}{2})$ و $(-1, \frac{3}{2})$ نقطتا انقلاب



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2/2016) | (1/2023 "أحياني")

س باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{x-1}{x+1}$

sol :

1) أوسع مجال للدالة

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

فيكون اوسع مجال للدالة $R/\{-1\}$

2) التقاطع مع المحورين

$F(0)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ النقطة $(1,0)$

$\therefore$ النقطة $(1,0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$\therefore$ النقطة $(0,-1)$ تقاطع مع الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{-x-1}{-x+1} \neq F(x)$

$\therefore$ لايوجد تناظر $F(-x) \neq -F(x)$

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

معادلة المحاذي العمودي $\therefore x=-1$

معادلة المحاذي الافقي $\therefore y=1$

5) النهايات

$F'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

$=\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow 2 \neq 0$ (لا يوجد نقاط حرجة)

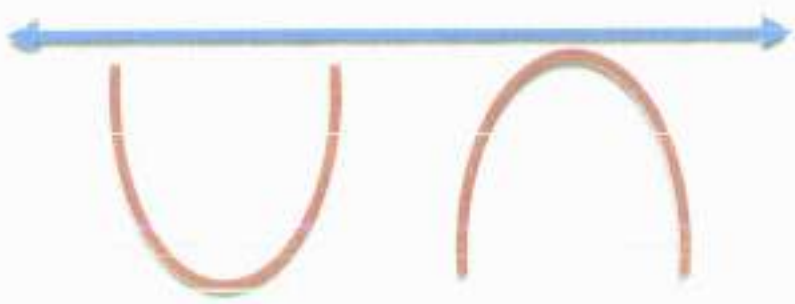
$F'(x)=2(x+1)^{-2}$

$\Rightarrow F''(x)=-4(x+1)^{-3}(1)=\frac{-4}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow 0=\frac{-4}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow -4 \neq 0$ (لا يوجد نقاط انقلاب)

+ + + + + − 1 − − − − −



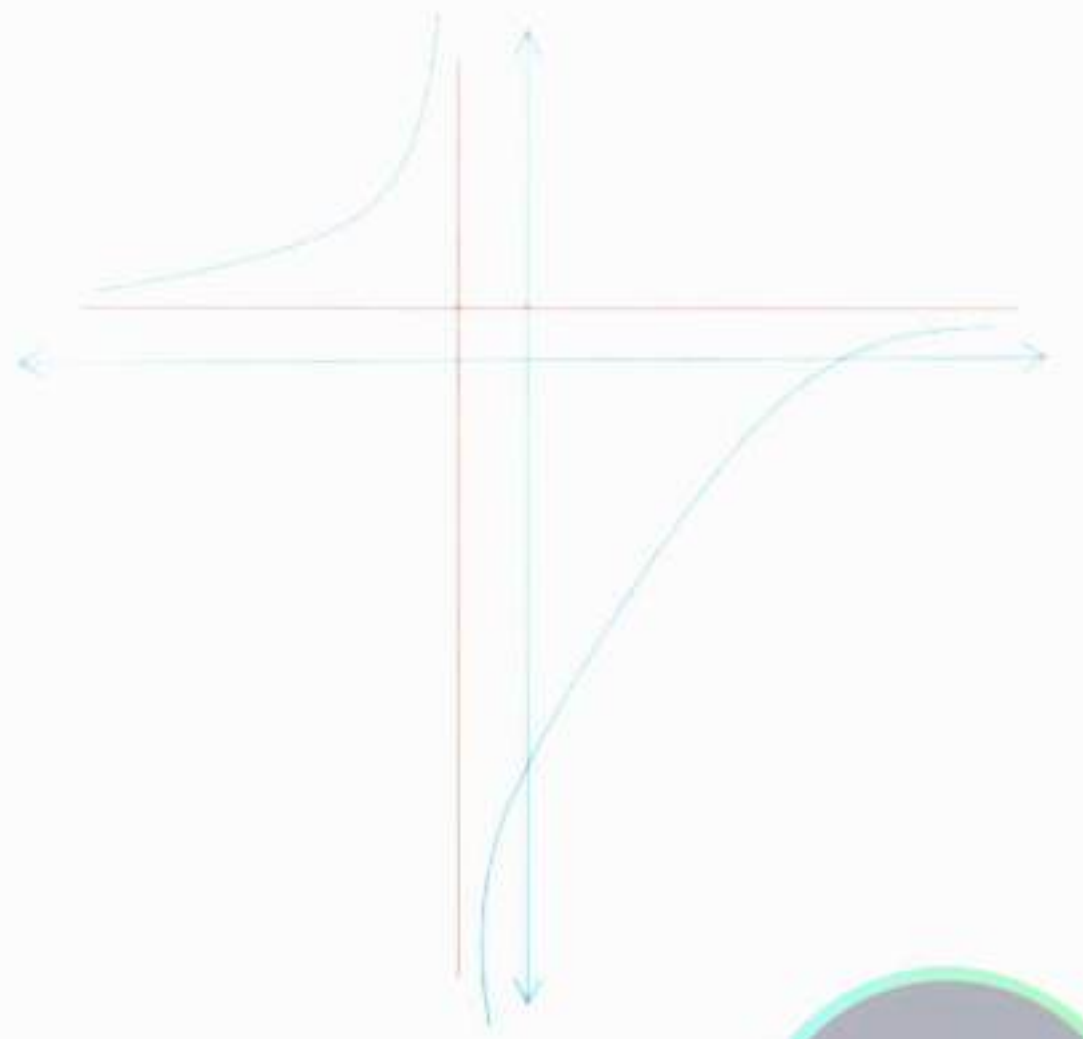
مناطق التحدب $\{x: x>-1\}$

مناطق التقعر $\{x: x<-1\}$

+ + + + + − 1 + + + + +

مناطق التزايد $(\{x: x<-1\}$

$\{x: x>-1\}$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2/2020) | (2/2022"تطبيقي") | (3/2023"تطبيقي")

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ، أرسم منحني الدالة : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

sol :

1) أوسع مجال للدالة R

2) محاذي افقي $y=1$, لا يوجد محاذي عمودي

3) التقاطع

$x=0 \Rightarrow y=0 , \Rightarrow (0,0)$

$y=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow (0,0)$

4) التناظر

$f(-x)=f(x)$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

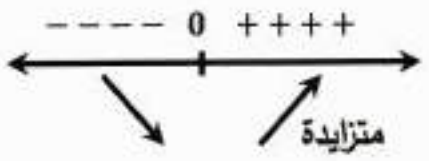
5) النهايات

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0$

$\Rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة



الدالة متزايدة في $\{x: x>0\}$

الدالة متناقصة في $\{x: x<0\}$

$(0\ ,\ 0)$ نقطة نهاية صغرى

6) نقاط الانقلاب

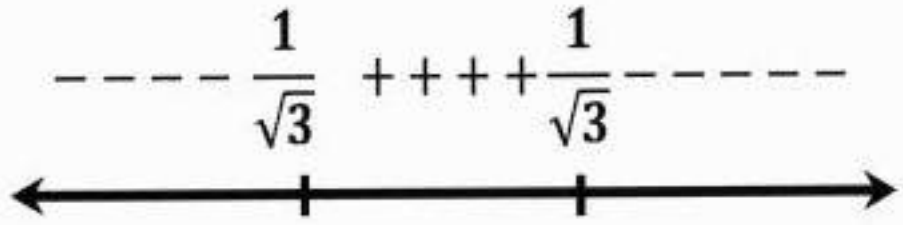
$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x\left(2(x^2+1)\right)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(2x^2+2-8^2)}{(x^2+1)^4}$$

$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 2-6x^2=0 \Rightarrow 1-3x^2=0$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

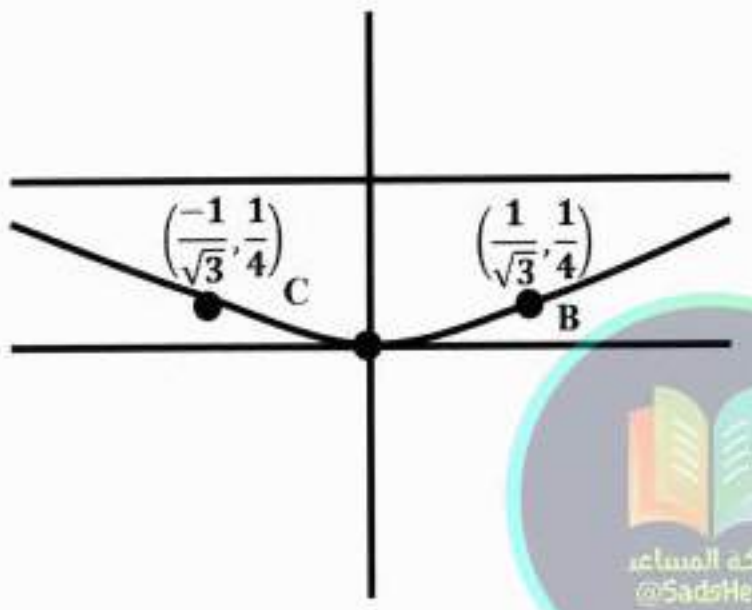


الدالة محدبة في $\left\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

الدالة مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\ ,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

الدالة محدبة في $\left\{\ x: x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

نقاط الانقلاب $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$



شبكة المساعد
@SadsHelp

(2/2022"احياني ")

باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

sol :

(1) أوسع مجال للدالة $R/\{-1\}$

(2) نقاط التقاطع مع المحورين

$$\text{let } y=0 \implies \frac{3x-1}{x+1}=0$$

$$3x-1=0 \implies 3x=1 \implies x=\frac{1}{3} \quad (\frac{1}{3},0)$$

$$\text{let } x=0 \implies y=\frac{3(0)-1}{0+1}=\frac{-1}{1}$$

$$\implies y=-1 \ (0,-1)$$

(3) التناظر

$$f(-x)=\frac{-3x-1}{-x+1}$$

$$-f(x)=\frac{-3x+1}{x+1}$$

$$\therefore f(x)\neq f(-x)$$

$$f(x)\neq -f(x)$$

∴ الدالة غير متناظرة حول محور الصادات وغير متناظرة حول نقطة الأصل

(4) المحاذيات / المحاذي الشاقولي:

$x+1=0 \implies x=-1$ معادلته

المحاذي الافقي:

$$yx+y=3x-1$$

$$y+1=3x-yx$$

$$\frac{y+1}{3-y}=x\frac{(3-y)}{3-y}$$

$$x=\frac{y+1}{3-y} \implies y=3-y=0 \implies y=3$$ معادلته

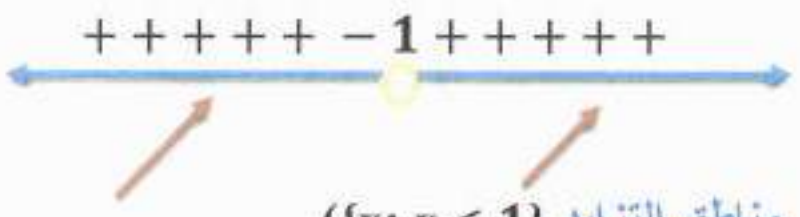
(5) النهايات

$$f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1).(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}\neq 0$$

∴ لا توجد نقط حرجة الدالة متزايدة في مجالها



({x: x <-1} مناطق التزايد
{x: x >-1}

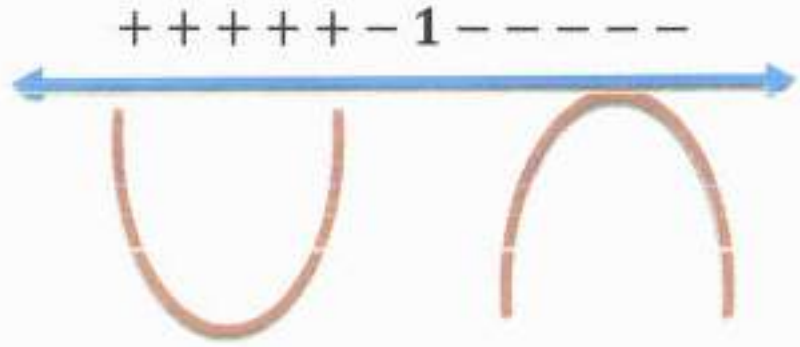
(6) نقط الانقلاب

$$f''(x)=\frac{-8}{(x+1)^2}\neq 0$$

∴ لا توجد نقط انقلاب

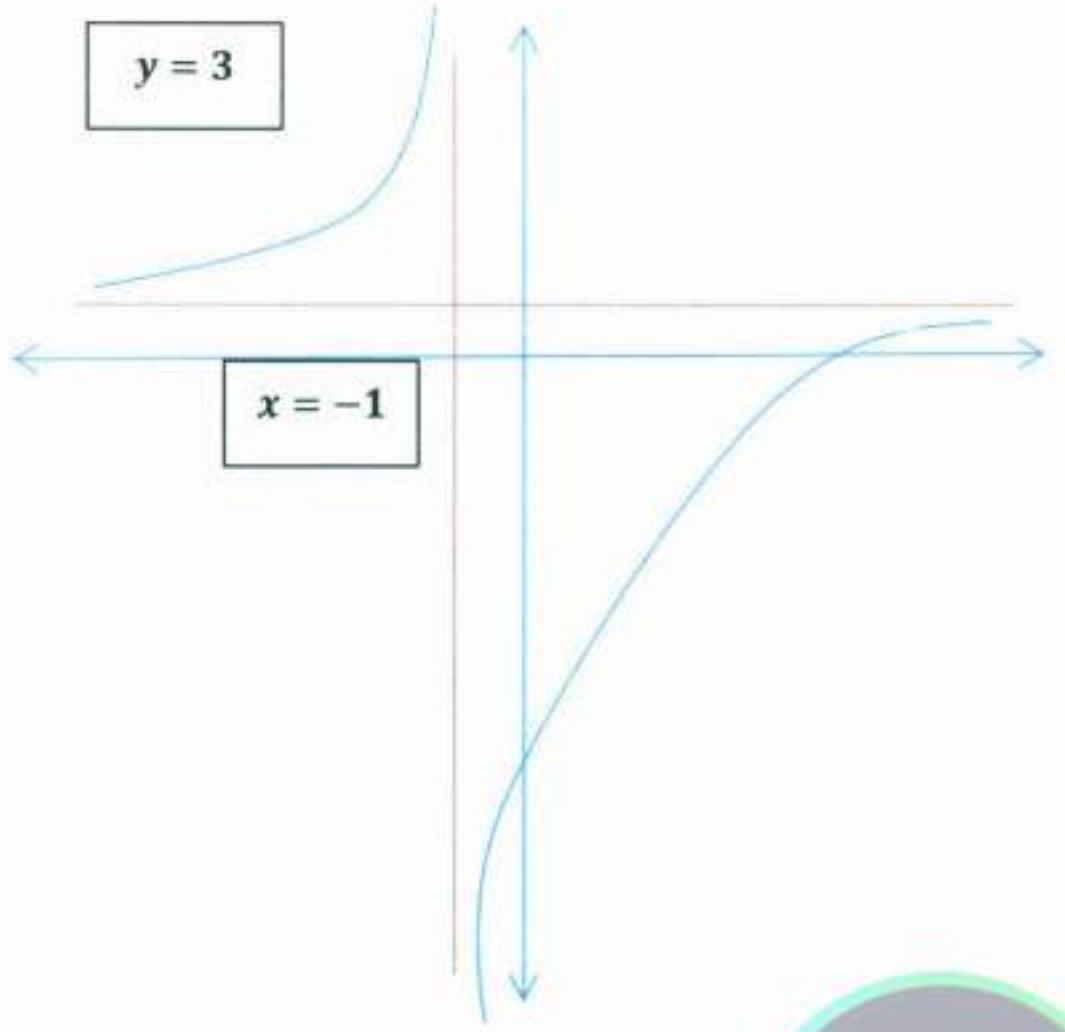
مناطق التحدب $\{x: x\in R, x>-1\}$

مناطق التقعر $\{x: x\in R, x<-1\}$



مناطق التحدب {x: x >-1}

مناطق التقعر {x: x <-1}



شبكة المساعد
@SadsHelp

الاسئلة الوزارية حول التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

الحالة الأولى :- الاسئلة الوزارية حول" جد ابعاد اكبر اسطوانة او اكبر مستطيل او اكبر دائرة"

س في ظل الحصار الجائر المفروض على قطرنا المناضل صمم عامل بناء مبدع نموذجاً لصندوق بضاعة على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل ومن غير غطاء فإذا كان حجمه $\frac{1}{16}\,m^3$ جد ابعاد الصندوق لتكون مساحة المادة المستخدمة في صناعته اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان طول ضلع القاعدة $= x$ ونفرض ان الارتفاع $= h$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2 h$$

$$\rightarrow \frac{1}{16} = x^2 h$$

$$\rightarrow 16x^2 h = 1$$

$$\rightarrow h = \frac{1}{16x^2}$$

(2/1997)

المساحية السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

ولان الصندوق بدون غطاء لذا سوف نحذف الضعف من القانون

وعليه سوف يكون

المساحة السطحية للصندوق = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$$A = 4\,x\,h + x^2$$

$$\rightarrow A = 4x\frac{1}{16x^2} + x^2$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{4}x^{-1} + x^2$$

$$A' = \frac{-1}{4}x^{-2} + 2x \quad , \quad \because A' = 0$$

$$\frac{-1}{4}x^{-2} + 2x = 0$$

$$\rightarrow \left[\frac{-1}{4x^2} + 2x = 0\right].4x^2$$

$$\rightarrow -1 + 8x^3 = 0 \quad \rightarrow 8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore h = \frac{1}{16x^2} = \frac{1}{16(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{16.\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$A'' = \frac{1}{2}x^{-3} + 2 = \frac{1}{2x^3} + 2$$

$$\rightarrow A''(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2.\frac{1}{8}} + 2 = 6 > 0$$ نهاية صغرى (اقل ما يمكن)

س حاوية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة حجمها $216\,\pi\,cm^3$ جد ابعادها اذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن , مع العلم ان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة $= r$,

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \pi r^2 h$

$$216\pi = \pi r^2 h$$

$$\rightarrow h = \frac{216}{r^2}$$

(2/2016)

المساحة السطحية (بدون غطاء) = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة السطحية (بدون غطاء) = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$$A = 2\pi\,r\,h + \pi\,r^2$$

$$A = 2\pi\,r\left(\frac{216}{r^2}\right) + \pi\,r^2$$

$$\rightarrow A = \pi(432r^{-1} + r^2)$$

$$A' = \pi(-432r^{-2} + 2r)$$

$$\rightarrow \left[\frac{-432}{r^2} + 2r = 0\right].r^2$$

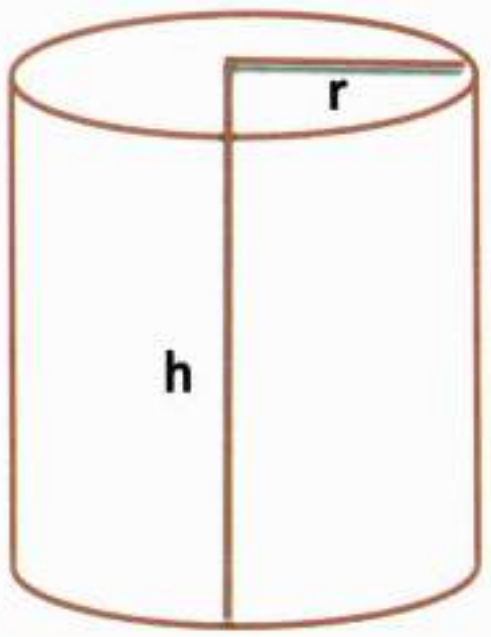
$$\rightarrow -432 + 2r^3 = 0$$

$$2r^3 = 432$$

$$\rightarrow r^3 = 216$$

$r = 6\,Cm$ نصف قطر قاعدتها

$, h = \frac{216}{6} = 6\,cm$ ارتفاعها



شبكة المساعد
@SadsHelp

س اذا كان نصف قطر كره يساوي نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة وكان مجموع حجمي الكرة والاسطوانة يساوي $90\ \pi\ cm^3$ جد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما الكلية اصغر ما يمكن.

sol:

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة ونصف قطر الكرة $= r$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع .

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3} r^3$

$$\left[90\ \pi = \pi x^2 h + \frac{4\pi}{3} r^3\right] . \frac{3}{\pi}$$

$$\rightarrow 270 = 3x^2 h + 4r^3$$

$$3x^2 h = 270 - 4r^3$$

$$\rightarrow h = \frac{270 - 4x^3}{3x^2}$$

$$\rightarrow h = \frac{270}{3x^2} - \frac{4x^3}{3x^2}$$

$$\rightarrow h = 90r^{-2} - \frac{4}{3} r$$

(2/1999)

المساحة السطحية للاسطوانة $= A_1$ = المساحة الجانبية $+ x\ 2$ مساحة القاعدة

المساحة السطحية للكرة $= A_2$ $4\ \pi r^2$

$$A = A_1 + A_2 = (2\ \pi\ r\ h + 2\pi\ r^2) + 4\pi\ r^2$$

$$= 2\ \pi\ r\ h + 6\ \pi\ r^2$$

$$A = 2\pi(\ r\ h + 3r^2)$$

$$\rightarrow A = 2\pi\left[r\left(90r^{-2} - \frac{4}{3} r\right) + 3r^2\right]$$

$$A = 2\pi\left[90r^{-1} - \frac{4}{3} r^2 + 3r^2\right]$$

$$A' = 2\pi\left[-90r^{-2} - \frac{8}{3} r + 6r\right] \quad , A = 0$$

$$2\pi\left[-90r^{-2} - \frac{8}{3} r + 6r\right] = 0$$

$$\rightarrow -90r^{-2} - \frac{8}{3} r + 6r = 0$$

$$\left[-\frac{90}{r^2} - \frac{8}{3} r + 6r = 0\right] . 3r^2$$

$$\rightarrow -270 - 8r^3 + 18r^3 = 0$$

$$10r^3 = 270$$

$$\rightarrow r^3 = 27$$

$\rightarrow r = 3\ cm$ نصف قطر كل من الكرة والاسطوانة

س خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه $216\ m$ جد ابعاده لتكون مساحة الصفائح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن .

Sol:

نفرض ان طول ضلع القاعدة $= x$, نفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= h$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$v = x^2 h$$

$$216 = x^2 h$$

$$\rightarrow h = \frac{216}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $+\times 2$ مساحة القاعدة

$$A = 4\ \times h + 2\ x^2$$

$$A = 4 \times \left(\frac{216}{x^2}\right) + 2\ x^2$$

$$\rightarrow A = 432x^{-1} + 2x^2$$

$$A' = -864x^{-2} + 4x \quad , \because A' = 0$$

$$-864x^{-2} + 4x = 0$$

(2/2000)

$$\rightarrow \left[\frac{-864}{x^2} + 4x = 0\right] . x^2$$

$$\rightarrow -864 + 4x^3 = 0$$

$$4x^3 = 864$$

$$\rightarrow x^3 = 216$$

$$\rightarrow x = 6$$

$$\therefore h = \frac{216}{x^2} = \frac{216}{36} = 6$$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي $6m$ وارتفاع الصندوق يساوي $6m$ اي ان الشكل مكعباً

$$A'' = 1728\ x^{-3} + 4 = \frac{1728}{x^3} + 4$$

$\rightarrow A''(6) = \frac{1728}{216} + 4 = 12 > 0$ نهاية صغرى (اقل ما يمكن)

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد بعدي علبة اسطوانية دائرية قائمة مسدودة من نهايتيها مساحتها السطحية $24\ \pi cm^2$ عندما يكون حجمها اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة $= r$ وارتفاعه $= h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

المساحة السطحية للاسطوانة = المساحة الجانبية $+ 2\ x$ مساحة القاعدة

المساحة السطحية للاسطوانة = محيط القاعدة x الارتفاع $+ 2\ x$ مساحة القاعدة

$$[24\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2] \div 2\pi$$
$$\rightarrow 12 = rh + r^2$$
$$\rightarrow rh = 12 - r^2$$
$$h = \frac{12 - r^2}{r}$$
$$v = \pi r^2 h$$
$$\rightarrow v = \pi r^2 . \left(\frac{12 - r^2}{r}\right)$$
$$= \pi(12r - r^3)$$
$$v' = \pi(12 - 3r^2)\ , v' = 0$$
$$\rightarrow \pi(12 - 3r^2) = 0$$
$$\rightarrow 3r^2 = 12$$
$$r^2 = 4$$
$$\rightarrow r = 2cm$$

نصف قطر الاسطوانة

$$\rightarrow h = \frac{12 - 4}{2} = 4\ cm$$

ارتفاع الاسطوانة

ابعاد الصندوق $(3\ ,3\ ,3)$

(2/2001)

(2/2004)

س برهن ان اكبر مستطيل محيطه $40cm$ يكون مربعا.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل $x\ ,y$

محيط المستطيل $= 2$ (الطول + العرض)

$$40 = 2(x + y)$$
$$\rightarrow 20 = x + y$$
$$\rightarrow x = 20 - y$$
$$A = x.y$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = (20 - y)y$$
$$= 20y - y^2$$
$$A' = 20 - 2y\ ,\quad A' = 0$$
$$\rightarrow 20 - 2y = 0$$
$$\rightarrow y = 10$$
$$x = 20 - 10 = 10$$
$$A'' = -2 < 0$$

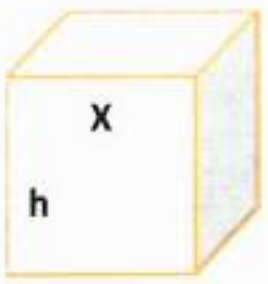
اي ان المستطيل يكون مربعاً عندما يكون في نهايته العظمى (مساحة اكبر ما يمكن)

("تمهيدي"/2005)

س خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وله غطاء كامل ,جد ابعاد الخزان لتكون مساحة المادة المستعملة في صناعته اقل ما يمكن علما ان سعة الخزان $27\ m^3$

Sol:

نفرض ابعاد الصندوق $h\ ,x\ ,x$



$$V = X * X * h$$
$$27 = x^2\ h$$
$$\rightarrow h = \frac{27}{x^2}$$

المساحة الكلية $(T.A) = 4xh + 2x^2$

$$A = 4x\left(\frac{27}{x^2}\right) + 2x^2$$
$$= \frac{108}{x} + 2x^2 = 108x^{-1} + 2x^2$$
$$A' = -108x^{-2} + 4x \quad \rightarrow A' = 0$$
$$\frac{-108}{x^2} + 4x = 0\} \div x^2$$
$$-108 + 4x^3 = 0$$
$$\rightarrow\ x^3 = \frac{108}{4}$$
$$\rightarrow x^2 = 27$$
$$\therefore x = 3\ cm$$
$$h = \frac{27}{9} \quad \rightarrow h = 3\ m$$

(2/2002)

("خارج القطر"1/2015)

س جد أبعاد مستطيل محيطه $100\ cm$ ومساحته اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل $x\ ,y$

محيط المستطيل $= 2$ (الطول + العرض)

$$100 = 2(x + y)$$
$$\rightarrow 50 = x + y$$
$$\rightarrow x = 50 - y$$
$$A = x.y$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = (50 - y)y$$
$$= 50y - y^2$$
$$A' = 50 - 2y\ ,\quad A' = 0$$
$$\rightarrow 50 - 2y = 0$$
$$\rightarrow y = 25\ cm$$
$$x = 50 - 25 = 25\ cm$$
$$A'' = -2 < 0$$

اي ان المستطيل يكون مربعاً عندما يكون في نهايته العظمى (مساحة اكبر ما يمكن)

("تمهيدي"/2010)

شبكة المساعد
@SadsHelp

س قطعة سلك طولها 8cm قطعت إلى قطعتين صنع من الأولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله ضعف عرضه جد طول كل قطعه ليكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة اقل ما يمكن

Sol:

نفرض ان طول المستطيل x وعرضه y بحيث ان $x = 2y$

ونفرض ان نصف قطر الدائرة r

بما ان طول السلك 8 متر وقطع إلى قطعتين فان مجموع محيطي القطعتين هي نفسها طول السلك وعليه تكون العلاقة في السؤال هي مجموع المحيطين والقاعدة التي يتم اشتقاقها من مجموع المساحتين

$$2(2y + y) + 2\pi r = 8$$

$$\rightarrow 6y + 2\pi r = 0$$

$$\rightarrow 3y + \pi r = 4$$

(1/2004)

$$3y = 4 - \pi r$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{3}(4 - \pi r)$$

$$A = 2y(y) + \pi r^2$$

$$\rightarrow A = \frac{2}{9}(4 - \pi r)^2 + \pi r^2$$

$$\rightarrow A = \frac{2}{9}(16 - 8\pi r + \pi^2 r^2) + \pi r^2$$

$$A' = \frac{2}{9}(-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r$$

$$\rightarrow \left[\frac{2}{9}(-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r = 0\right] \cdot \frac{9}{2\pi}$$

$$-8 + 2\pi r + 9r = 0$$

$$\rightarrow r(2\pi + 9) = 8$$

$$\rightarrow r = \frac{8}{2\pi + 9}$$

$6y = \frac{72}{2\pi+9}$ محيط المستطيل والذي يمثل طول القطعة الاولى

$2\pi r = \frac{16\pi}{2\pi+9}$ محيط الدائرة والذي يمثل طول القطعة الثانية

$A'' = \frac{2}{9}(2x^2) + 2\pi > 0$ اي ان مجموعة المساحتين في نهايته الصغرى (اصغر ما يمكن)

س جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

$16 = x.y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$\rightarrow y = \frac{16}{x}$$

$p = 2(x + y)$ محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$$p = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

$$= 2(x + 16x^{-1})$$

$$p' = 2(1 - 16x^{-2}) = 0$$

(1/2005)

$$\rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$$

(2/2006)

$$y = \frac{16}{4} = 4$$

$$p = 2(4 + 4) = 16\ cm$$

$$p'' = 2(32x^{-3}) = \frac{64}{x^3}$$

("تمهيدي"/2014)

$$p''(4) = 1 > 0$$

اي ان المحيط في نهايته الصغرى (اقل محيط ممكن)

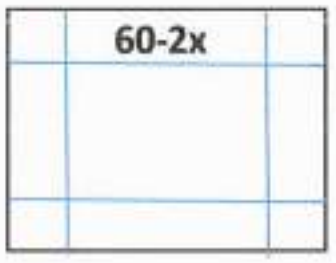
س صفيحة مستوية معدنية مربعة الشكل طول ضلعها 60cm قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان طول الضلع المقطوع= X

$$v = (60 - 2x)^2.x$$

$$V = (3600 - 240x + 4x^2).x$$



$$V = 3600x - 240x^2 + 4x^3$$

$$V' = 3600 - 480x + 12x^2$$

$$[3600 - 480x + 12x^2 = 0] \div 12$$

$$300 - 40x + x^2 = 0$$

(2/2005)

$$\rightarrow (30 - x)(10 - x) = 0$$

اما $x = 30$ (يهمل ذهنيا)

او $x = 10$ (طول ضلع المربع المقطوع)

$$V'' = -480 + 24x$$

$$\rightarrow V''(10) = -480 + 240 = -240$$

< 0 الحجم اكبر ما يمكن

شبكة المساعد
@SadsHelp

س صفيحة مستوية معدنية مستطيلة الشكل بعديها, 50 cm
80 cm قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع = X

في العلبة الناتجة يكون طول ضلع القاعدة $80-2x$

وعرضها $50-2x$ وارتفاعها x

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$v = (80-2x)(50-2x)(x)$$

$$V = (4000 - 260x + 4x^2).x$$

$$V = 4000x - 260x^2 + 4x^3$$

("تمهيدي"/2009)

$$V' = 4000 - 520x + 12x^2$$

$$[4000 - 520x + 12x^2 = 0] \div 4$$

$$1000 - 130x + 3x^2 = 0$$

$$\rightarrow (100-3x)(10-x) = 0$$

اما $x = \frac{100}{3}$ (يهمل ذهنيا)

او $x = 10cm$ (طول ضلع المربع المقطوع)

$$V'' = -520 + 24x$$

$$\rightarrow V''(10) = -520 + 240 < 0$$ الحجم اكبر ما يمكن

س علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\ \pi\ cm^3)$, جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = r

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

$$A = 2\pi r h + \pi r^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$125\pi = \pi r^2 h$$

$$\rightarrow h = \frac{125}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض(2) في(1)

("تمهيدي"/2019)

$$A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right) + \pi r^2$$

$$\rightarrow A = 250\,\pi\, r^{-1} + \pi r^2$$

$$A' = [-250\,\pi\, r^{-2} + 2\,\pi\, r = 0] \div 2\pi$$

$$\frac{-125}{r^2} + r = 0$$

$$\frac{-125 + r^3}{r^2} = 0$$

$$-125 + r^3 = 0$$

$$r^3 = 125 \rightarrow r = 5\ Cm$$ نصف قطر قاعدتها

$$h = \frac{125}{25} = 5\ cm$$ ارتفاعها

س جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $25\ cm^2$

Sol:

نفرض ان طول المستطيل x , نفرض ان عرض المستطيل y

$$A = x.y$$

$$25 = x.y$$

(3/2017)

$$\rightarrow y = \frac{25}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$p = 2(x+y)$$

$$p = 2x + 2y \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$p = 2x + \frac{50}{x}$$

$$\rightarrow p = 2x + 50x^{-1}$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 - 50x^{-2}$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 2 - \frac{50}{x^2} =$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \left[2 - \frac{50}{x^2} = 0\right].x^2$$

$$2x^2 - 50 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 25 \quad \rightarrow x = 5$$

$$\therefore y = \frac{25}{5} \quad \rightarrow y = 5$$

$$p = 2(5+5)$$

$$\rightarrow p = 20\ cm$$

سكة المساعد
@SadsHelp

س علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(64\ \pi\ cm^3)$, جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة $= r$

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= h$

نفرض ان حجمها $= v$, نفرض ان مساحتها $= A$

$\because A =$ مساحة قاعدة واحدة + المساحة الجانبية

$A =$ مساحة القاعدة + الارتفاع. محيط القاعدة

$$A = 2\pi r h + \pi r^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$64\pi = \pi r^2 h$$

("تمهيدي"تطبيقي"/2019)

$$\rightarrow h = \frac{64}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض(2) في(1)

$$A = 2\pi r\left(\frac{64}{r^2}\right) + \pi r^2$$

$$A' = [-128\,\pi\, r^{-2} + 2\,\pi\, r = 0]$$

$$\rightarrow A = 128\,\pi\, r^{-1} + \pi\, r^2$$

$$[0 = \frac{-128}{r^2} + 2\pi r] \div 2\pi$$

$$\left[0 = \frac{-64}{r^2} + r\right].r^2$$

$$-64 + r^3 = 0$$

$$r^3 = 64$$

$\rightarrow r = 4$ Cm نصف قطر قاعدتها

$h = \frac{64}{16} = 4$ cm ارتفاعها

س جد ابعاد اكبر خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة بدون غطاء يمكن صنعه من صفيحة مستطيلة ابعادها $16\ cm\ ,\ 10\ cm$ وذلك بقطع مربعات متساوية المساحة عند الرؤوس وثني الاطراف .

Sol:

نفرض طول ضلع المربع المقطوع $= x$

الحجم = مساحة القاعدة * الارتفاع

$$V = (16 - 2x)(10 - 2x)x$$

$$V = (160 - 32x - 20x + 4x^2)x$$

$$V = 4x^3 - 52x^2 + 160\,x$$

$$V' = 12x^2 - 104x + 160$$

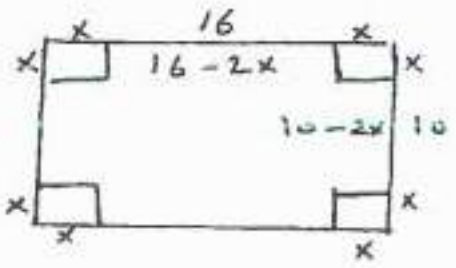
("تطبيقي" 2/2019)

$V' = 0$ نجعل

$$[12x^2 - 104x + 160 = 0] \div 4$$

$$3x^2 - 26x + 40 = 0$$

$$(3x - 20)(x - 2) = 0$$



اما $3x - 20 = 0$

$$\Rightarrow 3x = 20$$

$\Rightarrow x = \frac{20}{3}$ تهمل

او $x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2\ cm$ الارتفاع

الطول $16 - 2x = 16 - 2(2) = 12\ cm$

العرض $10 - 2x = 10 - 2(2) = 6\ cm$

س جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $(36\ cm^2)$

Sol:

نفرض ابعاد المستطيل $x\ ,y$

المحيط $P = 2(x + y) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

المسافة $A = x * y = 36$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1/2019)

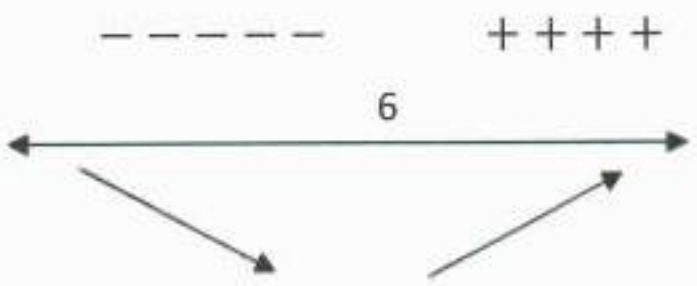
نعوض (2) في (1)

$$P = 2\left(\frac{36}{y} + y\right)$$

$$p' = \left[2\left(\frac{-36}{y^2} + 1\right) = 0\right] \div (2)$$

$$\frac{-36}{y^2} + 1 = 0$$

$$\frac{36}{y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6\ cm$$



$$x = \frac{36}{6} = 6\ cm$$

$$P = 2(6 + 6)$$

اقل محيط $P = 24$ cm

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد ابعاد اكبر علبة على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء يمكن صنعها من صفيحه معدنية مربعة الشكل طول ضلعها (48 cm) وذلك بقص اربع مربعات متساوية الابعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الاجزاء البارزة منها

Sol:

$V = (48 - 2x)(48 - 2x)x$

$V = (48 - 2x)^2 x$

("تطبيقي" 2/2018)

$V = (2304 - 192x + 4x^2)x$

$V = 4x^3 - 192x^2 + 2304x$

$v' = 12x^2 - 384x + 2304$

$12x^2 - 384x + 2304 = 0 \,] \div 12$

$x^2 - 32x + 192 = 0$

$(x - 24)(x - 8) = 0$

$X = 24$ تهمل , $x = 8$ الارتفاع

الطول $= 48 - 16 = 32$ cm

العرض $= 48 - 16 = 32$ cm

س علبة اسطوانية الشكل مفتوحه من الاعلى سعتها $(27\pi)cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحه المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن

Sol:

نفرض نص فطر الاسطوانة $= r$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$

نفرض الحجم $= v$, المساحة الكلية بدون غطاء $= A$

$A = 2\pi rh + \pi r^2$ ----------(1

$V = r^2 \pi h \Rightarrow 27\pi = r^2 \pi h$

$\Rightarrow h = \frac{27}{r^2}$ .....(2

نعوض (2) في (1)

$A = 2\pi r \cdot \frac{27}{r^2} + \pi r$

("تطبيقي" 3/2017)

$\Rightarrow A = \frac{54\pi}{r} + \pi r$

$\Rightarrow A = 54\pi r^{-1} + \pi r^2$

$= -54 \pi r^{-2} + 2 \pi r \Rightarrow A' = 0A'$

$[\frac{-54\pi}{r^2} + 2r = 0 \,] \cdot (r^2)$

$[-54 \pi + 2 \pi r^3 = 0 \,] \div 2 \pi$

$-27 + r^3 = 0$

$r^3 = 27$

$r = 3\ cm$

$h = \frac{27}{r^2} \Rightarrow h = \frac{27}{9} \Rightarrow h = 3$ cm

سكة المساعد
@SadsHelp

س صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها (12 cm) وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من أركانها الأربعة ثم ثنيت الاجزاء البارزة منها ، ما الحجم الأعظم لهذا الصندوق ؟

Sol:

نفرض طول ضلع المربع المقطوع = x

الطول = 12 – 2x ، العرض = 12 – 2x

الارتفاع = x ، نفرض الحجم = V

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2)x$$

$$V = 2304x - 48x^2 + 4x^3$$

$$v' = 144 - 96x + 12x^2$$

$$144 - 96x + 12x^2 = 0\ ] \div 12$$

$$12 - 8x + x^2 = 0$$

$$(6 - x)(2 - x) = 0$$

X= 6 تهمل , x= 2

عند 2 توجد نهاية عظمى للحجم

$$V = 2(12 - 4)(12 - 4)$$

$$V = 128\ cm^3$$

(1 /2023 "تطبيقي")

شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة الثانية :- الاسئلة الوزارية حول" جد العدد الذي , جد العددين "

س جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض العدد X ومربعه X^2

("تمهيدي"/2007)

$$h = x - x^2$$
$$h' = 1 - 2x$$
$$\rightarrow 1 - 2x = 0 \quad \rightarrow 2x = 1$$
$$\rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$h'' = -2 < 0$$ العد الناتج هو اكبر ما يمكن

س جد العدد الذي اذا أضيف إلى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض ان العدد x ونظريه الضربي $\frac{1}{x}$

("خارج القطر"1/2013)

$$A = x + \frac{1}{x}$$
$$\rightarrow A = x + x^{-1}$$
$$A' = 1 - x^2$$
$$\rightarrow \left[1 - \frac{1}{x^2} = 0\right].x^2 \rightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

(3/2014)

$$A'' = 2x^{-3}$$
$$\rightarrow A'' = \frac{2}{x^3}$$
$$A''(1) = 2 > 0$$ في نهايته الصغرى (اصغر ما يمكن)
$$A''(-1) = -2 < 0$$ في نهايته العظمى (اكبر ما يمكن)
اي ان العدد المطلوب يساوي(-1)

س جد العدد الذي اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر مايمكن.

Sol:

نفرض العدد X ومربعه X^2

("تطبيقي"3/2023)

$$h = x + x^2$$
$$h' = 1 + 2x$$
$$\rightarrow 1 + 2x = 0 \quad \rightarrow 2x = -1$$
$$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$h'' = -2 > 0$$ العد الناتج هو اصغر ما يمكن

س جد العددين الموجبين الذي مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان العدد x ونفرض العدد الثاني y

("أسئلة الانبار"4/2014)

$$x + y = 75$$
$$\rightarrow x = 75 - y$$
$$h = x\,y^2$$
$$\rightarrow h = (75 - y)y^2$$
$$= 75y^2 - y^3$$
$$h' = 150y - 3y^2$$
$$\rightarrow 150y - 3y^2 = 0$$
$$\rightarrow 3y(50 - y) = 0$$
$$y = 0$$ يهمل $$\text{OR } y = 50$$

$$x = 75 - 50 = 25 \rightarrow \{50, 25\}$$ العددان هما
$$h'' = 150 - 6y$$
$$\rightarrow h''(50) = 150 - 300 = -150 < 0$$ الجواب يمثل اكبر ما يمكن

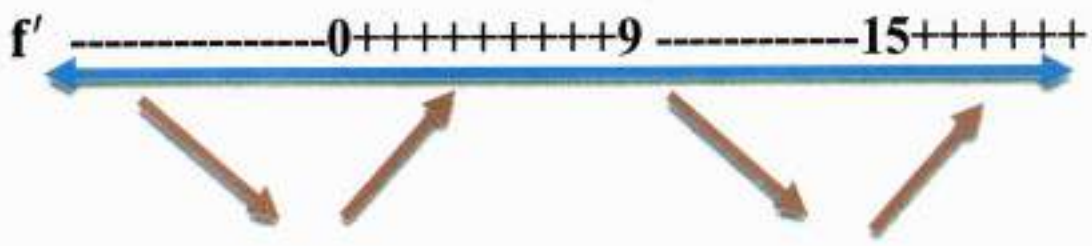
س جد عددين مجموعهما يساوي 15 ,اذا كان حاصل ضرب مكعب العدد الاول مع مربع العدد الثاني اكبر ما يمكن

Sol:

نفرض ان العدد الأول $= x$
فيكون العدد الثاني $= 15-x$

("خارج القطر"2/2017)

$$y = x^3.(15 - x)^2$$
$$y' = x^2.2(15 - x)(-1) + (15 - x)^2.3x^2$$
$$0 = x^2(15 - x)\left(-2x + 3(15 - x)\right)$$
$$= x^2(15 - x)(-2x + 45 - 3x)$$
$$= x^2(15 - x)(-5x + 45)$$
$$\text{if } x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$ يهمل
$$\text{or } x = 15$$ يهمل
$$-5x + 45 = 0$$
$$\rightarrow 5x = 45$$
$$\rightarrow x = 9$$ العدد الاول
العدد الثاني $= 15 - 9 = 6$



الحالة الثالثة :- الاسئلة الوزارية حول" جد نقطة تنتمي الى "

س لتكن $y^2 = 8x$ جد نقطة تنتمي الى المنحني
وتكون اقرب ما يمكن الى النقطة $(6,0)$

Sol:

نفرض النقطة $p(x,y)$

$$y^2 = 8x$$

$$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$

نعوض $y^2=8x$

$$p = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}$$

$$p = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x}$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 36}$$

(1/2002)

$$p' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}}$$

$$\rightarrow \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = 0$$

$$\rightarrow 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow x = 2$$

$$y^2 = 16 \quad \rightarrow y = \pm 4$$

مجموعة الحل $\{(2,4),(2,-4)\}$

س جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$
بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$ (او)
جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $x^2 = y^2 - 3$
بحيث تكون اقرب مايمكن للنقطة $(0,4)$

Sol:

نفرض النقطة $p(x,y)$

$$y^2 - x^2 = 3$$

$$\rightarrow x^2 = y^2 - 3$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{y^2-3}$$

$$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$$

$$p = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16}$$

$$= \sqrt{y^2 - 8y + 13}$$

$$p' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$$

$$\rightarrow \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0$$

$$\rightarrow 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow y = 2$$

$$x = \pm\sqrt{4-3} \quad \rightarrow x = \pm 1$$

مجموعة الحل $\{(1,2),(-1,2)\}$

(تمهيدي"/2023 تطبيقي")

(2/2011)

("تمهيدي"/2012)

(1/2013)

("خارج القطر"2/2015)

("خارج القطر"2/2016)

("تطبيقي"3/2019)

س اذا كان $y + 4x = 24$ فجد قيمتي x, y
التي تجعل yx^2 اكبر ما يمكن.

Sol:

نفرض النقطة $p(x,y)$

$$y + 4x = 24$$

$$\rightarrow y = 24 - 4x$$

$$A = yx^2$$

$$A = (24 - 4x)x^2$$

$$\rightarrow A = 24x^2 - 4x^3$$

$$A' = 48x - 12x^2$$

$$\rightarrow 12x(4-x) = 0$$

$x = 0$ تهمل

او $x = 4$

$$\rightarrow y = 24 - 16 = 8$$

$$A'' = 48 - 24x$$

$$\rightarrow A''(4) = 48 - 96$$

$$= -48$$

اي ان القيم الناتجة في نهايتها العظمى

("تمهيدي"/2008)

س جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 5$
بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة $(4,0)$

Sol:

نفرض النقطة $p(x,y)$

$$y^2 - x^2 = 5 \quad \rightarrow y^2 = x^2 + 5$$

$$p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16}$$

$$p = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 + 5}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 8x + 21}$$

$$p' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+21}}$$

$$\rightarrow \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+21}} = 0$$

$$\rightarrow 4x - 8 = 0 \quad \rightarrow x = 2$$

$$y^2 = x^2 + 5 \quad \rightarrow y^2 = 4 + 5 \quad \rightarrow y = \pm 3$$

مجموعة الحل $\{(2,3),(2,-3)\}$

(2/2015)

شبكة المساعد
@SadsHelp

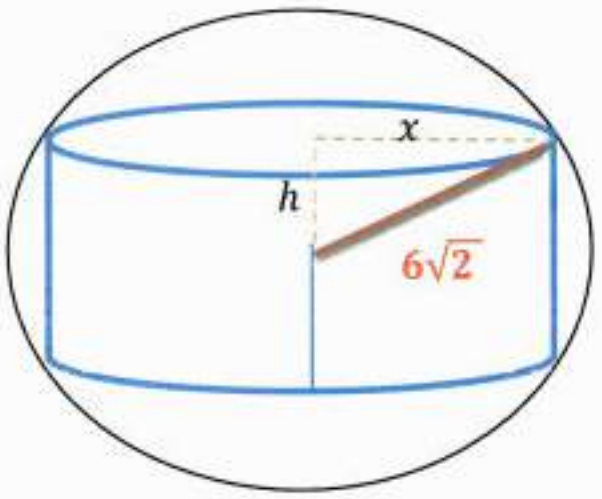
الحالة الرابعة :- الاسئلة الوزارية حول" ابعاد اكبر مستطيل , ابعاد اسطوانة , ابعاد المخروط , مساحة مثلث" موضوعه( ) او مثلث قائم الزاوية او مخروط دائري قائم "

س جد ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة مجوفة نصف قطرها $6\sqrt{2}$ cm

Sol:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة $= x$

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= 2h$



$$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + h^2$$

$$\rightarrow 72 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 72 - h^2$$

$$\rightarrow x = \sqrt{72 - h^2}$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$A = 2\pi \times (2h) = 4\pi \times h$$

$$A = 4\pi h\sqrt{72 - h^2}$$

$$\rightarrow A = 4\pi\sqrt{h^2}\sqrt{72 - h^2}$$

(2/1999)

$$A = 4\pi\sqrt{72h^2 - h^4}$$

$$A' = 4\pi\frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}}$$

$$\rightarrow 4\pi\frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} = 0$$

$$144h - 4h^3 = 0$$

$$\rightarrow 4h(36 - h^2) = 0$$

$$h^2 = 36 \quad \rightarrow h = 6$$

$$x^2 = 72 - 36 = 36$$

$\rightarrow x = 6$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

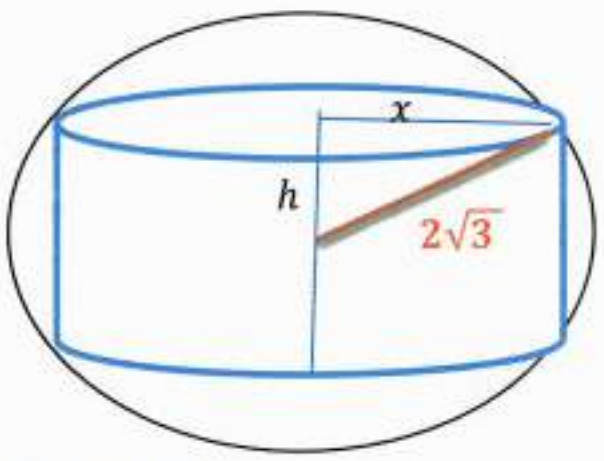
$\rightarrow 2h = 12$ ارتفاع الاسطوانة

س جد بعدي اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $2\sqrt{3}$ cm

Sol:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة $= x$

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= 2h$



$$(2\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$$

$$\rightarrow 12 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 12 - h^2$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = \pi x^2 \times (2h) = 2\pi x^2 h$$

$$v = 2\pi h(12 - h^2)$$

$$\rightarrow v = 2\pi(12h - h^3)$$

(2/2001)

$$v' = 2\pi(12 - 3h^2)$$

$$\rightarrow 2\pi(12 - 3h^2) = 0$$

$$12 - 3h^2 = 0$$

$$\rightarrow 3h^2 = 12$$

$$\rightarrow h^2 = 4$$

$$\rightarrow h = 2$$

$$x^2 = 12 - 4 = 8$$

$\rightarrow x = 2\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$\rightarrow 2h = 4$ ارتفاع الاسطوانة

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6cm

Sol:

نفرض ان طول قطر قاعدة المثلث $= 2x$

ونفرض ان ارتفاع المثلث $= h$

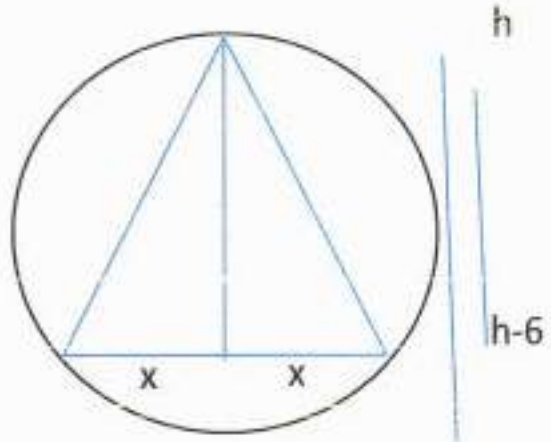
$(6)^2 = x^2 + (h-6)^2$

$\rightarrow 36 = x^2 + h^2 - 12h + 36$

$\rightarrow x^2 = 12h - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{12h - h^2}$

(1/2003)



مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}(2x)(h)$

$A = h\sqrt{12h - h^2}$

$A = \sqrt{h^2}\sqrt{12h - h^2}$

$= \sqrt{12h^3 - h^4} \quad h > 0$

$A' = \frac{36h^2 - 4h^3}{2\sqrt{12h^3 - h^4}} = 0$

("تمهيدي"/2006)

$\rightarrow 36h^2 - 4h^3 = 0$

$\rightarrow 4h^2(9-h) = 0$

(1/2010)

$4h^2 = 0 \quad \rightarrow h = 0$ يهمل

او $9 - h = 0 \quad \rightarrow h = 9cm$

$x = \sqrt{108 - 81} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\,cm$

طول القاعدة $\rightarrow 2x = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,cm$

س جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة مجوفة نصف قطرها 3cm .

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط $= x$

ونفرض ان ارتفاع المخروط $= h$

$9 = x^2 + (h-3)^2$

$\rightarrow 9 = x^2 + h^2 - 6h + 9$

$x^2 = 6h - h^2$

$V = \frac{\pi}{3}x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h$

(1/2008)

$\rightarrow \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 12h - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h(4-h) = 0$

اما $h = 0$ يهمل

او $h = 4$

$\rightarrow x^2 = 24 - 16 = 8$

$V = \frac{\pi}{3}(8)(4)$

$= \frac{32\pi}{3}cm^3$

س مخروط دائري قائم طول مولده $9\sqrt{3}$ cm جد ارتفاع هذا المخروط لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن.

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط $= x$

ونفرض ان ارتفاع المخروط $= h$

$(9\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 243 = x^2 + h^2$

(1/2006)

$x^2 = 243 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

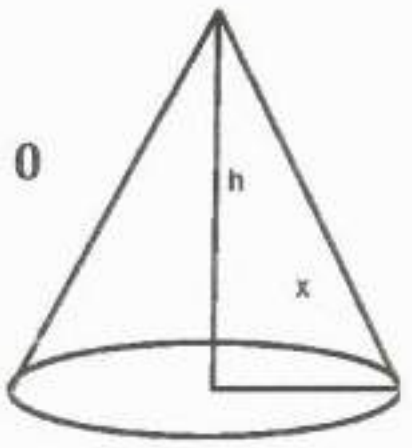
$V = \frac{\pi}{3}x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(243 - h^2)h$

$\rightarrow V = \frac{\pi}{3}(243h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2)$

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2) = 0$



$\rightarrow 243 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 243] \div 3$

$h^2 = 81$

$\rightarrow h = 9$ ارتفاع المخروط

سكة المساعد
@SadsHelp

س جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات بحيث رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات , ثم جد محيطه.

Sol:

نفرض ان العرض $= 2x$ والطول $= y$

$y = 12 - x^2$ ..... (1)

$A = 2x.y$ ..... (2)

$A = 2x(12 - x^2)$

$\rightarrow A = 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2$

$\rightarrow 6x^2 = 24$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = 2$

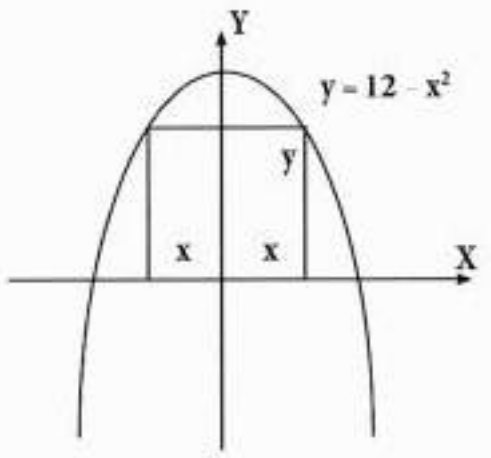
$y = 12 - 4 \quad \rightarrow y = 8$

$2x = 4$ العرض , $y = 8$

$M = (y + 2x).2$

$M = (8 + 4)(2)$

$= 24$ وحدة طول



("1/2007"خارج القطر)

(2/2012)

(2/2017)

("1/2019"تطبيقي)

س مثلث قائم الزاوية طول وتره $4\sqrt{3}$ cm أدير احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط $= x$

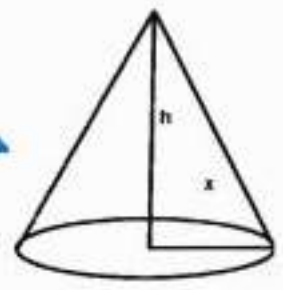
ونفرض ان ارتفاع المخروط $= h$

$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 48 = x^2 + h^2$

$x^2 = 48 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع



$V = \frac{\pi}{3}x^2h$

$V = \frac{\pi}{3}(48 - h^2)h \quad \rightarrow V = \frac{\pi}{3}(48h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(48 - 3h^2)$

(2/2009)

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(48 - 3h^2) = 0$

$\rightarrow 48 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow 3h^2 = 48] \div 3$

$h^2 = 16 \quad \rightarrow h = 4$

$x^2 = 48 - 16 = 32$

$\rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$V = \frac{\pi}{3}(32)(4) \quad \rightarrow V = \frac{128\pi}{3}\ cm^3$

س جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن وضعه داخل دائرة نصف قطرها 12cm

Sol:

نفرض ان طول قطر قاعدة المثلث $= 2x$

ونفرض ان ارتفاع المثلث $= h$

$r^2 = x^2 + (h - 12)^2 \quad \rightarrow (12)^2$

$= x^2 + (h - 12)^2$

$\rightarrow 144 = x^2 + h^2 - 24h + 144$

$\rightarrow x^2 = 24h - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{24h - h^2}$ ..... (1)

$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$ مساحة المثلث

$A = x.h$ ..... (2) نعوض (2) في (1)

$A = h\sqrt{24h - h^2}$

$A = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$

$= \sqrt{24h^3 - h^4}$

$A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$

$\rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0 \quad \rightarrow 4h^2(18 - h) = 0$

$4h^2 = 0 \quad \rightarrow h = 0$ يهمل

او $18 - h = 0 \quad \rightarrow h = 18cm$

$x = \sqrt{24(8) - (18)^2} = \sqrt{18} = 6\sqrt{3}\ c$

$\rightarrow 2x = 12\sqrt{3}$ cm طول القاعدة

(2/2024)

("1/2012"خارج القطر)

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين. .

Sol:

عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x

ونفرض ان ارتفاع المخروط = h

$(6\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$

$\rightarrow 108 = x^2 + h^2$

(1/2011)

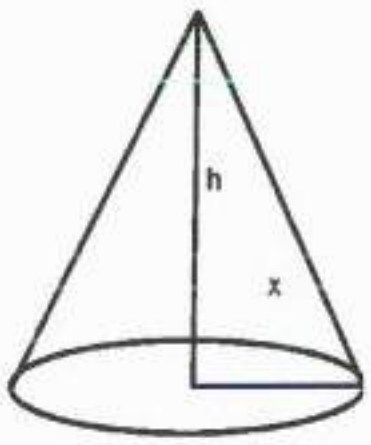
$x^2 = 108 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h$

$\rightarrow V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$



$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)$

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0$

(1/2014)

$\rightarrow 108 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow 3h^2 = 108$

$h^2 = 36 \rightarrow h = 6$

$x^2 = 108 - 36 = 72$

$\rightarrow x = 6\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$V = \frac{\pi}{3}(72)(6) \rightarrow V = 144\pi\ cm^3$

س جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 6 cm.

Sol:

نفرض ان الطول = 2x ونفرض ان العرض= y

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2x.y$ ..... (1)

$x^2 + y^2 = 36$

$\rightarrow y^2 = 36 - x^2$

$\rightarrow y = \sqrt{3 - x^2}$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$A = 2x\sqrt{36 - x^2}$

(1/2009)

$= 2\sqrt{36x^2 - x^4}$

$A' = \frac{2(72x - 4x^3)}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0$

$[72x - 4x^3] = 0 \div 4$

$x(18 - x^2) = 0$

$if\ x = 0$ يهمل

$or\ x = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$ يهمل

$or\ x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

(4/2015 "أسئلة النازحين")

$y = \sqrt{36 - 18}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$A = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})$

$= 36\ cm^2$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $4\sqrt{3}$

Sol:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة $= x$

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= 2h$

$$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2$$

$$\rightarrow 48 = x^2 + h^2$$

(3/2012)

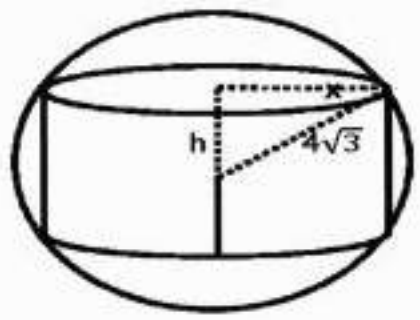
$$x^2 = 48 - h^2$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = \pi x^2 \times (2h) = 2\pi x^2 h$$

$$v = 2\pi h(48 - h^2)$$

$$\rightarrow v = 2\pi(48h - h^3)$$



$$v' = 2\pi\,(48 - 3h^2)$$

$$\rightarrow 2\pi(48 - 3h^2) = 0$$

$$48 - 3h^2 = 0$$

$$\rightarrow 3h^2 = 48$$

$$\rightarrow h^2 = 16$$

$$\rightarrow h = 4$$

$$x^2 = 48 - 16 = 32$$

$\rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$\rightarrow 2h = 8$ ارتفاع الاسطوانة

س جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$.

sol:

نفرض ان الطول $= 2x$ ونفرض ان العرض $= y$

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x,y مثلث قائم الزاوية

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = 2x.y \ \ldots\ldots\ldots (1)$$

(1/2012)

$$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$$

(1/2024)

$$\rightarrow y^2 = 32 - x^2$$

$$\rightarrow y = \sqrt{32 - x^2} \ \ldots\ldots (2)$$ نعوض(2) في(1)

$$A = 2x\sqrt{32 - x^2}$$

$$= 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

$$A' = \frac{2(64x - 4x^3)}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0$$

$$\rightarrow [64x - 4x^3] = 0 \div 4$$

$$x(16 - x^2) = 0$$

$if\ x = 0$ يهمل $or\ x = -\sqrt{16} = -4$ يهمل

$or\ x = \sqrt{16} = 4$

$$\rightarrow y = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4$$

$2x = 8\,cm$ الطول , $y = 4\,cm$ العرض

شبكة المساعد
@SadsHelp

س مجموع محيطي دائرة ومربع 60 cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

Sol:

نفرض طول ضلع المربع = x

نفرض نصف قطر الدائرة = r

نفرض مجموع مساحتي الشكلين (الدائرة والمربع) = A

مجموع مساحتيهما = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$A = r^2\pi + x^2$ ——————(1)

60 = محيط الدائرة + محيط المربع

60 =(القطر × النسبة الثابتة + 4 طول الضلع)

$(60 = 4x + 2r\pi) \div 2$

$\Rightarrow r\pi + 2x = 30$

$\Rightarrow r = \frac{30-2x}{\pi}$ ——————(2)

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$A = (\frac{30-2x}{\pi})^2\pi + x^2$

$A = \left(\frac{900-120x+4x^2}{\pi^2}\right)\pi + x^2$

$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2) + x^2$

$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) + 2x$

$[0 = (\frac{1}{\pi}(-120 + 8x) + 2x)]\pi$

$(-120 + 8x + 2x\pi = 0) \div 2$

$\Rightarrow -60 + 4x + x\pi = 0$

$x(\pi + 4) = 60$

$\Rightarrow x = \frac{60}{\pi+4}$

$\Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{\pi}(8) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0$ موجبة

$\therefore$ عند $x = \frac{60}{\pi+4}$ نهاية صغرى

$\therefore x = \frac{60}{\pi+4} cm$ طول ضلع المربع

$\therefore r = \frac{30-2x}{\pi} = \frac{30-2(\frac{60}{\pi+4})}{\pi} = \frac{30-\frac{120}{\pi+4}}{\pi}$

$r = \frac{\frac{30\pi+120-120}{\pi+4}}{\pi} = \frac{30\pi}{\pi+4} \times \frac{1}{\pi} = \frac{30}{\pi+4}$ cm

$\therefore 2r = 2(\frac{30}{\pi+4})$

$= \frac{60}{\pi+4} = x$ طول ضلع المربع

$\therefore$ طول قطر الدائرة = طول ضلع المربع

(3/2013)

(3/2015)

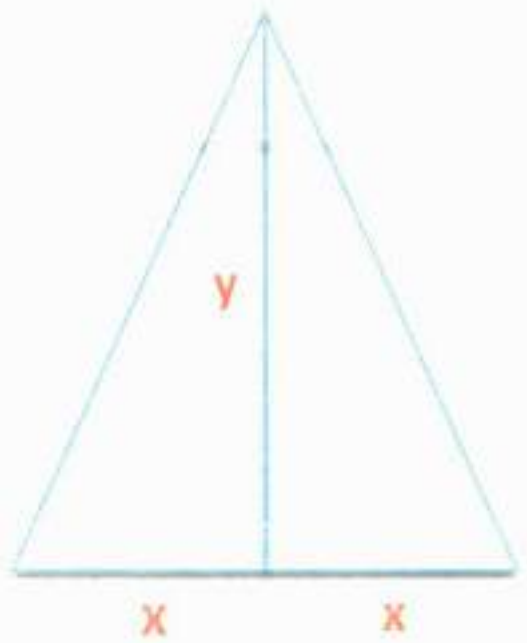
("تطبيقي"2/2023)

س جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل ساق $8\sqrt{2}$ cm.

Sol:

نفرض ارتفاع المثلث = h ونفرض طول القاعدة = $2x$

المساحة $A = \frac{1}{2}(2x)h$



$A = xh$ ..... (1)

حسب مبرهنة فيثاغورس

$(8\sqrt{2})^2 = h^2 + x^2$

$128 = h^2 + x^2$

$x^2 = 128 - h^2$

$\rightarrow x = \sqrt{128-h^2}$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$A = h\sqrt{128-h^2}$

$A = \sqrt{h^2(128-h^2)}$

$A = \sqrt{(128h^2 - h^4)}$ ("تمهيدي"/2016)

$A' = \frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{(128h^2 - h^4)}}$

$A' = \frac{2(128h - 2h^3)}{2\sqrt{(128h^2 - h^4)}} = 0$

$[128h - 2h^3 = 0] \div 2$

$64h - h^3 = 0$

$h(64 - h^2) = 0 \quad , h = 0$ يهمل

$64 - h^2 = 0$

$\rightarrow h^2 = 64$

$\rightarrow h = 8cm$

$x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$

$A = (8).(8) = 64\ cm^2$ اكبر مساحة

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 8 cm.

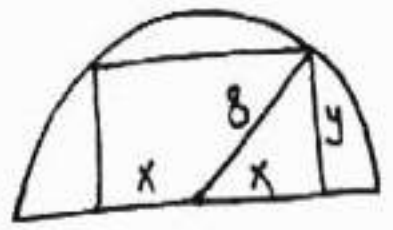
Sol:

نفرض ان الطول $= 2x$ ونفرض ان العرض$= y$

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x,y مثلث قائم الزاوية

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2x.y$ ..... (1)



$x^2 + y^2 = 64$

$\rightarrow y^2 = 64 - x^2$

$\rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$A = 2x\sqrt{64 - x^2}$

$= 2\sqrt{64x^2 - x^4}$

$A' = \dfrac{2(128x - 4x^3)}{2\sqrt{64x^2 - x^4}}$

("1/2016"خارج القطر)

$[128x - 4x^3] = 0 \div 4$

$x(32 - x^2) = 0$

if $x = 0$ يهمل

or $x = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$ يهمل

or $x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$y = \sqrt{64 - 32}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$A = 2\sqrt{32}\,.\sqrt{32}$

$= 2(32) = 64\ cm^2$

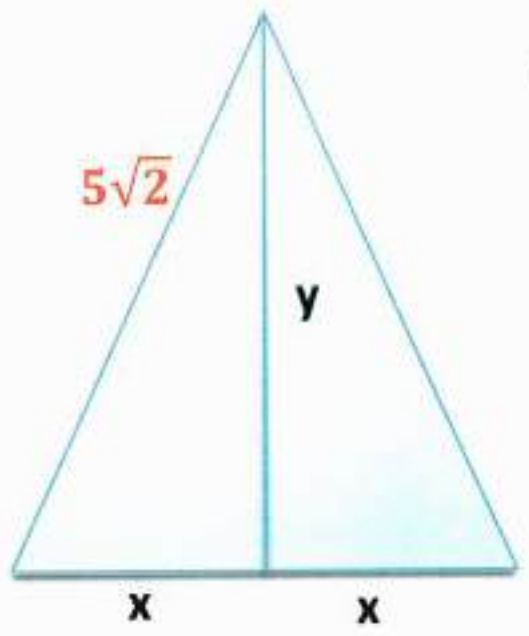
س جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $5\sqrt{2}$

Sol:

نفرض ارتفاع المثلث $= y$ ونفرض طول القاعدة $= 2x$

المساحة $A = \dfrac{1}{2}(2x)y$

$A = xy$ ..... (1)



حسب مبرهنة فيثاغورس

$y^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2$

$y^2 + x^2 = 50$

$x^2 + y^2 = 50$

$\rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$A = x\sqrt{50 - x^2}$

$A = \sqrt{x^2(50 - x^2)}$

$A = \sqrt{(50x^2 - x^4)}$

(3/2016)

$A' = \dfrac{100x - 4x^3}{2\sqrt{(50x^2 - x^4)}}$

$A' = \dfrac{100x - 4x^3}{2\sqrt{(50x^2 - x^4)}} = 0$

$[100x - 4x^3 = 0] \div 4$

$25x - x^3 = 0$

$x(25 - x^2) = 0$, $x = 0$ يهمل

$25 - x^2 = 0$

$\rightarrow x^2 = 25$

$\rightarrow x = 5$

$y = \sqrt{50 - 25} = \sqrt{25} = 5$

$A = (5).(5) = 25\ cm^2$ اكبر مساحة

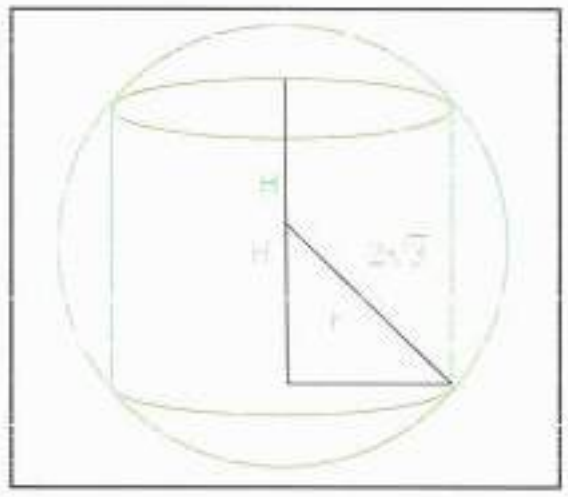
شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة ، طول نصف قطرها $2\sqrt{3}$ cm

Sol:

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= 2h$

نصف قطر الاسطوانة $= r$



$V = 2\pi r^2 h$ ..... (1)

$h^2 + r^2 = (2\sqrt{3})^2$

$h^2 + r^2 = 12$

$r^2 = 12 - h^2$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$V = 2\pi h(12 - h^2)$

$V = 24\pi h - 2\pi h^3$

("تطبيقي" 1/2020)

$V' = 24\pi - 6\pi h^2$

$[24\pi - 6\pi h^2 = 0] \div 6\pi$

$4 - h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 4$

$h = \mp 2$ $\quad h = -2$ يهمل

$\therefore h = 2$

الارتفاع $\quad 2h = 2(2) = 4$ cm

س جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 6 cm

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط $= r$

ونفرض ان ارتفاع المخروط $= h$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ..... (1)

حسب مبرهنة فيثاغورس

$r^2 + h^2 = 36$

$r^2 = 36 - h^2$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$V = \frac{\pi}{3}(36 - h^2)h$

("خارج القطر"3/2016)

$\rightarrow \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0$

$\left[\frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0\right] \div \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow 36 - 3h^2 = 0$

$\rightarrow h^2 = \frac{36}{3} = 12$

$\rightarrow h = 2\sqrt{3}$

$r^2 = 36 - 12 = 24$

$V = \frac{\pi}{3}(24)(2\sqrt{3})$

$= 16\sqrt{3}\pi$ cm^3

شبكة المساعد
@SadsHelp

الحالة الخامسة :- الاسئلة الوزارية حول" " تشابة المثلثين" "

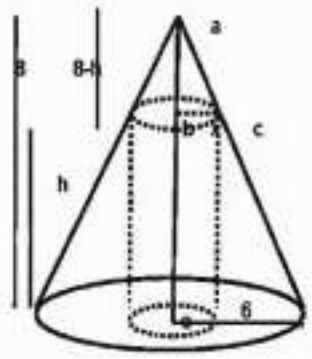
س جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm ونصف قطر قاعدته 6cm

Sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة $= x$

ونفرض ان ارتفاع الأسطوانة $= h$

من تشابه المثلثين aef , abc



$$\frac{x}{6} = \frac{8-h}{8}$$

$$8x = 6(8-h)$$

$$\rightarrow 4x = 24 - 3h$$

$$3h = 24 - 4x$$

$$\rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 4x)$$

$V =$ حجم الاسطوانة $= \pi x^2 h$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$V = \pi x^2 \frac{1}{3}(24 - 4x)$$

$$V = \frac{\pi}{3}(24x^2 - 4x^3)$$

(1/1997)

$$V' = \frac{\pi}{3}(48x - 12x^2)$$

$$\rightarrow 48x - 12x^2 = 0$$

$$12x(4 - x) = 0$$

$12x = 0 \rightarrow x = 0$ يهمل or $x = 4cm$

$$\rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 16) = \frac{8}{3}cm$$

المساحة السطحية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع + 2 $\times$ مساحة القاعدة

$$A = 2\pi \times h + 2\pi\, x^2$$

$$A = 2\pi(4)\left(\frac{8}{3}\right) + 2\pi(4)^2 = \frac{160}{3}\ cm^2$$

س جد ابعاد مخروط دائري قائم حجمه اقل ما يمكن ويحيط بكرة نصف قطرها 3 cm.

Sol:

نفرض ان قطر قاعدة المخروط $= x$

ونفرض ان ارتفاع المخروط $= h$

في المثلث Abc

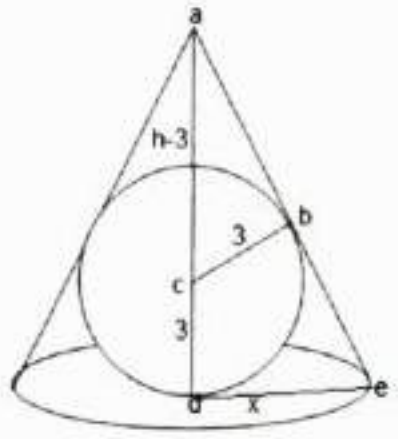
$$(h-3)^2 = 9 + (ab)^2$$

$$\rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ab)^2$$

$$(ab)^2 = h^2 - 6h$$

$$\rightarrow ab = \sqrt{h^2 - 6h}$$

من تشابه المثلثين abc , ade



$$\frac{h}{\sqrt{h^2 - 6h}} = \frac{x}{3}$$

$$\rightarrow x\sqrt{h^2 - 6h} = 3h$$

$$\rightarrow x = \frac{3h}{\sqrt{h^2 - 6h}}$$

(2/1998)

$$V = \frac{\pi}{3}x^2 h$$

$$\rightarrow V = \frac{\pi}{3}h\left(\frac{9h^2}{h^2 - 6h}\right)$$

$$V = 3\pi\left(\frac{h^2}{h-6}\right)$$

$$V' = 3\pi\left(\frac{(h-6).2h - h^2.1}{(h-6)^2}\right) = 0$$

$$2h^2 - 12h - h^2 = 0$$

$$\rightarrow h^2 - 12h = 0$$

$$h(h-12) = 0$$

$\rightarrow$ either $h = 0$ يهمل OR $h = 12$

$$x = \frac{36}{\sqrt{72}} = \frac{36}{6\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\ cm$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4cm وارتفاعه 12cm يراد قطع مخروط دائري منه يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الأصلي وقاعدته توازي قاعدة المخروط الأصلي جد أبعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر ما يمكن .

sol:

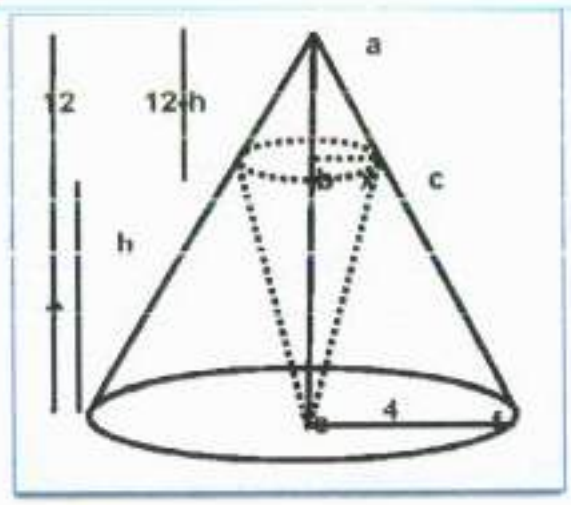
نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة = r ونفرض ان ارتفاع = h

الأسطوانة = h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h\,\pi$ ..... (1)

من تشابه المثلثين aef , abc



$\frac{12-h}{12} = \frac{r}{4}$

$\rightarrow 12r = 4(12-h)$

$\rightarrow 3r = 12 - h$

$\rightarrow h = 12 - 3r$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2(12-3r)$

$= \frac{\pi}{3}(12r^2 - 3r^3)$ (2/2003)

$\rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(24r - 9r^2)$

$\rightarrow 24r - 9r^2 = 0$

$\rightarrow 3r(8-3r) = 0$

$\therefore r(10-3r) = 0$

$\rightarrow$ either $r = 0$ يهمل

or $r = \frac{8}{3}$ $\therefore h = (12-8) \rightarrow h = 4$

س abc مثلث فيه ad=20cm, bc=12 cm,ad⊥ bc,ab=ac

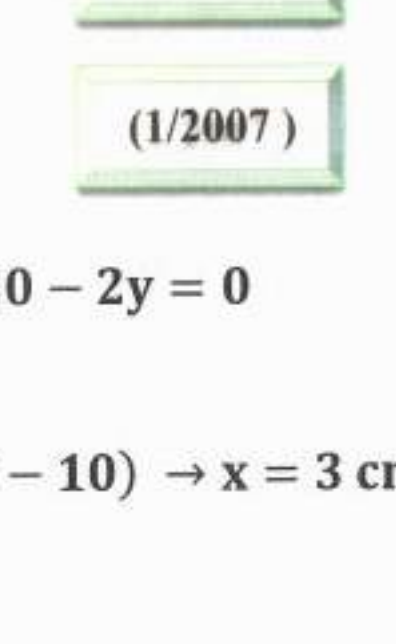
جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث .

جد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20cm وارتفاعه 12 cm .

sol:

نفرض ان بعدي المستطيل 2x,y

من تشابة المثلثين abd , aei



$\frac{20-y}{20} = \frac{2x}{12}$

$\rightarrow [40x = 12(20-y)] \div 4$

$10x = 3(20-y)$

$\rightarrow x = \frac{3}{10}(20-y)$

مساحة المستطيل = الطول x العرض $A = 2x.y$

$A = \frac{3}{5}(20-y).y$ (1/2001)

$= \frac{3}{5}(20y - y^2)$ (1/2007)

$A' = \frac{3}{5}(20-2y) = 0 \rightarrow 20-2y = 0$

$y = 10$ cm $\rightarrow x = \frac{3}{10}(20-10) \rightarrow x = 3$ cm

$2x = 6$ cm , $y = 10$ cm

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث .

Sol:

نفرض ان نقطة التقاطع مع محور السينات $(x\ ,0)$

نفرض ان نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0\ ,y)$

من تشابة المثلثين $abc\ ,aef$

$$\frac{6}{x}=\frac{y-8}{y}$$

$$\rightarrow 6y=x(y-8)$$

$$\rightarrow x=\frac{6y}{y-8}$$

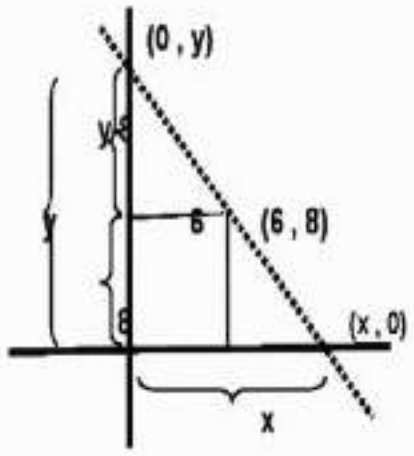
("خارج القطر" 1/2011)

ساحة المثلث $=\frac{1}{2}$ القاعدة x الارتفاع

$$A=\frac{1}{2}x.y$$

$$A=\frac{1}{2}y\left(\frac{6y}{y-8}\right)$$

$$\rightarrow\ A=\frac{3y^2}{y-8}$$



$$A'=\frac{(y-8).6y-3y^2.1}{(y-8)^2}$$

$$=\frac{6y^2-48y-3y^2}{(y-8)^2}$$

$$=\frac{6y^2-48y-3y^2}{(y-8)^2}=0$$

$$\rightarrow 3y^2-48y=0$$

$3y(y-16)=0\ \rightarrow y=0$ يهمل $\text{OR}\ y=16$

$$x=\frac{(6)(16)}{16-8}\ \rightarrow x=12$$

$\rightarrow (12,0),(0.16)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{16-0}{0-12}=-\frac{4}{3}$$

معادلة المستقيم $y_2-y_1=m(x_2-x_1)$

$$\rightarrow (y-16)=-\frac{4}{3}(x-0)$$

$$3y-48=-4x$$

معادلة المستقيم $\rightarrow 4x+3y-48=0$

س جد مساحة اصغر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها 3 cm.

sol:

نفرض ان طول قاعدة المثلث $=2x$ ونفرض ارتفاع المثلث $=h$

في المثلث acb

$$(h-3)^2=9+(ac)^2$$

$$\rightarrow h^2-6h+9=9+(ac)^2$$

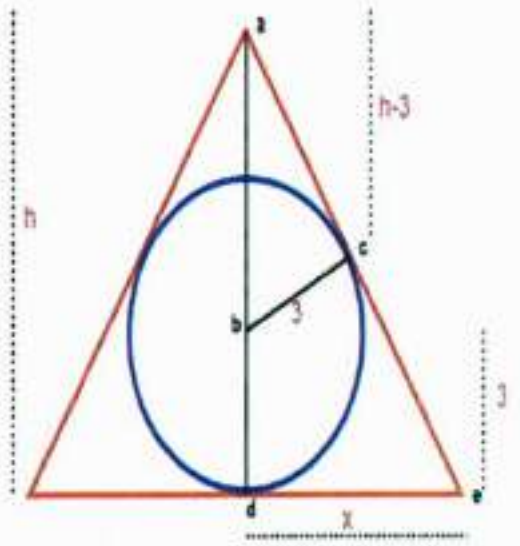
$$(ac)^2=h^2-6h$$

$$\rightarrow ac=\sqrt{h^2-6h}$$

("خارج القطر" 1/2008)

من تشابه المثلثين $acb\ ,ade$

$$\frac{h}{\sqrt{h^2-6h}}=\frac{x}{3}$$



$$\rightarrow x\sqrt{h^2-6h}=3h$$

$$\rightarrow x=\frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$$

$$A=\frac{1}{2}2x\,h$$

$$\rightarrow A=\left(\frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}.h\right)$$

$$=\left(\frac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}\right)$$

$$A'=\frac{\sqrt{h^2-6h}.6h-3h^2.\frac{2h}{2\sqrt{h^2-6h}}}{\sqrt{h^2-6h}}$$

$$\left[\sqrt{h^2-6h}.6h-3h^2.\frac{2h-6}{2\sqrt{h^2-6h}}=0\right].2\sqrt{h^2-6h}$$

$$12h(h^2-6h)-3h^2(2h-6)=0$$

$$12h^3-72h^2-6h^3+18h^2=0$$

$$6h^3-54h^2=0$$

$$\rightarrow 6h^2(h-9)=0$$

$\rightarrow$ either $h=0$ يهمل OR $h=9\ cm$

$$x=\frac{27}{\sqrt{81-54}}=\frac{27}{\sqrt{27}}=3\sqrt{3}\ cm$$

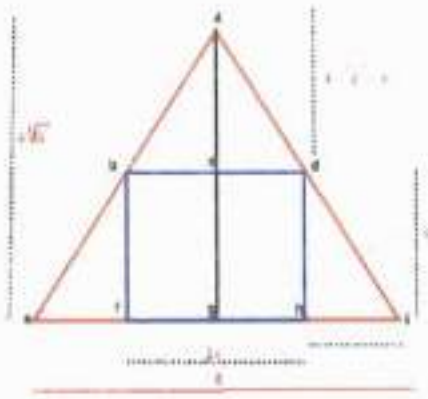
$$\rightarrow A=3\sqrt{3}.9=27\sqrt{3}\ cm^2$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه $4\sqrt{3}$.

sol:

نفرض ان بعدي المستطيل $2x\ ,\ y$



$\rightarrow 4L^2 = L^2 + 48$

$\rightarrow 3L^2 = 48 \ \rightarrow L^2 = 16$

$\rightarrow L = 4 \ \rightarrow 2L = 8$

abd , aei من تشابة المثلثين

$$\frac{4\sqrt{3}-y}{4\sqrt{3}} = \frac{2x}{8}$$

$\rightarrow [8\sqrt{3}\,x = 8(4\sqrt{3}-y)] \div 8$

$\sqrt{3}\,x = (4\sqrt{3}-y)$

(2/2008)

$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-y)$

مساحة المستطيل = الطول x العرض $A = 2x.y$

$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-y).y$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}\,y - y^2)$

$\rightarrow A' = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-2y) = 0 \ \rightarrow 4\sqrt{3}-2y = 0$

$y = 2\sqrt{3}$ cm

$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-2\sqrt{3})$

$\rightarrow x = 2$ cm $\ \rightarrow 2x = 4$ cm $\ , y = 2\sqrt{3}$ cm

س جد بعدي اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين يقعان على ساقيه.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل $x\ ,\ y$

abc , aef من تشابة المثلثين

$$\frac{18-y}{18} = \frac{x}{24}$$

$\rightarrow [18x = 24(18-y)] \div 6$

$3x = 4(18-y)$

$\rightarrow x = \frac{4}{3}(18-y)$

مساحة المستطيل = الطول x العرض $A = x.y$

$A = \frac{4}{3}(18-y).y$

(2/2013)

$= \frac{4}{3}(18\,y - y^2)$

(3/2018)

$A' = \frac{4}{3}(18-2y) = 0 \ \rightarrow 18-2y = 0$

$y = 9\ cm \ \rightarrow x = \frac{4}{3}(18-9) \ \rightarrow x = 12\ cm$

$A' = \frac{4}{3}(-2) < 0$

("تمهيدي"/2015)

("تمهيدي"/2017)

س جد أبعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6 cm وطول قطر قاعدته 8 cm

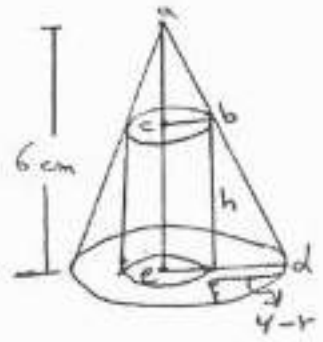
Sol:

نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة $r =$

ونفرض ان ارتفاع الأسطوانة $h =$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h\,\pi$ ..... (1)



aef , abc من تشابه المثلثين

$$\frac{h}{4-r} = \frac{6}{4}$$

$2h = 12 - 3r$

$\rightarrow h = \frac{12-3r}{2}$ ..... (2)

نعوض (2) في (1)

$V = \pi r^2 \left(\frac{12-3r}{2}\right) \ = \frac{\pi}{2}(12r^2 - 3r^3)$

$V' = \frac{\pi}{2}(24r - 9r^2)$

$\therefore r(24-9r) = 0 \rightarrow$ either $r = 0$ يهمل

or $r = \frac{24}{9} \ \rightarrow r = \frac{8}{3}$

("أسئلة النازحين"/1/2015)

$\therefore h = \frac{12 - 3 * \frac{8}{3}}{2} \ \rightarrow h = \frac{4}{2} \ \rightarrow h = 2$

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد أبعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6 cm وطول قطر قاعدته 10 cm

Sol:

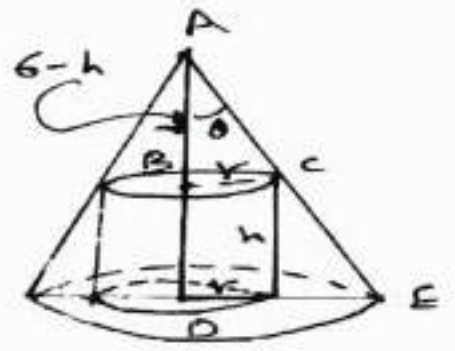
نفرض ان قطر قاعدة الاسطوانة $= r$

ونفرض ان ارتفاع الاسطوانة $= h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h\,\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

من تشابه المثلثين aef , abc



$$\frac{6-h}{6} = \frac{r}{5}$$

$$6r = 30 - 5h$$

$$\rightarrow h = \frac{30-6r}{5} \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$V = \pi r^2 \left(\frac{30-6r}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi}{5}(30r^2 - 6r^3)$$

$$\rightarrow V' = \frac{\pi}{5}(60r - 18r^2)$$

$$\rightarrow V' = \left[\frac{\pi}{5}(60r - 18r^2) = 0\right] \div \frac{\pi}{5}$$

$$\rightarrow 60r - 18r^2 = 0\ ] \div 6$$

$$\therefore r(10-3r) = 0 \rightarrow \text{either}\quad r = 0 \quad \text{يهمل}$$

$$\text{or}\quad r = \frac{10}{3} \quad \therefore h = \frac{30-20}{5} \quad \rightarrow h = 2$$

(1/2016)

س جد مساحة اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 24 cm ونصف قطر قاعدته 12 cm

Sol:

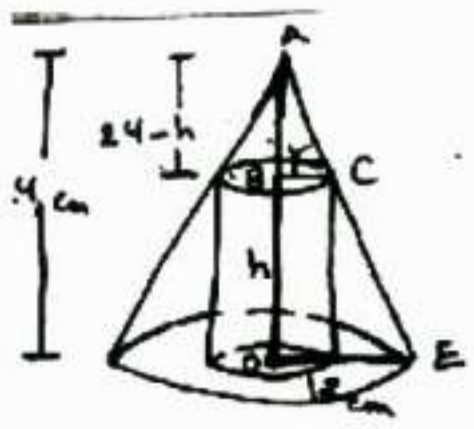
نفرض ان نصف قطر القاعدة $= r$

ونفرض ان ارتفاع الأسطوانة $= h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = r^2 h\,\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

من تشابه المثلثين aef , abc



$$\frac{24}{24-h} = \frac{12}{r}$$

$$[12(24-h) = 24r] \div 12$$

$$24 - h = 2r$$

$$\rightarrow h = 24 - 2r \ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$V = \pi r^2 (24 - 2r)$$

$$= 24\pi r^2 - 2\pi r^3$$

$$\rightarrow V' = 48\pi r - 6\pi r^2$$

$$\rightarrow V' = [48\pi r - 6\pi r^2 = 0] \div 6\pi$$

$$\rightarrow 8r - r^2 = 0$$

$$\therefore r(8-r) = 0 \rightarrow \text{either}\quad r = 0 \quad \text{يهمل}$$

$$\text{or}\quad r = 8 \quad \text{نصف القطر}$$

$$\therefore h = 24 - 2(8) = 8\ \text{cm} \quad \text{الارتفاع}$$

$$\therefore \text{المساحة}\ A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$A = 2\pi(8)(8) + 2\pi(8)^2$$

$$= 128\pi + 128\pi \quad = 256\,\pi\ \text{cm}^2$$

(2/2018)

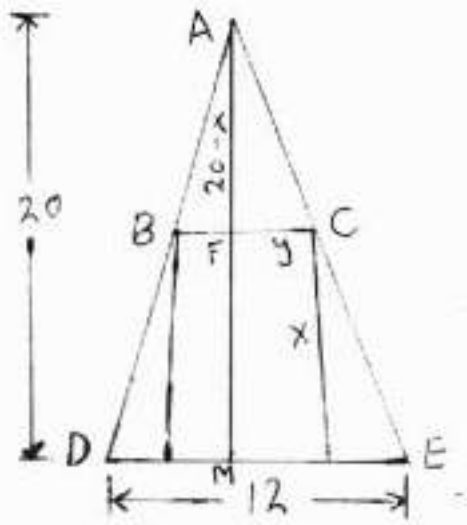
س جد بعدي اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث طول قاعدته 12 cm وارتفاعه 20 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين يقعان على ساقيه.

Sol:

نفرض ان بعدي المستطيل x , y

$$A = x.y \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

من تشابة المثلثين abc , aef



$$\frac{y}{12} = \frac{20-x}{20}$$

$$\rightarrow y = \frac{12}{20}(20-x)$$

$$y = \frac{3}{5}(20-x) \ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$A = x\frac{3}{5}(20-x)$$

ملاحظة:الرسم مهم اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجتان

$$\rightarrow A = \frac{3}{5}(20x - x^2)$$

$$A' = \frac{3}{5}(20 - 2x)$$

$$\rightarrow A' = 0 \quad \rightarrow \frac{3}{5}(20-2x) = 0$$

$$\rightarrow 2x = 20 \quad \rightarrow x = 10\ cm$$

نعوض قيمة (x) في (2)

$$y = \frac{3}{5}(20-10)$$

$$\rightarrow y = \frac{3}{5}(10) \quad \rightarrow y = 6\ cm$$

(1/2017 "خارج القطر")

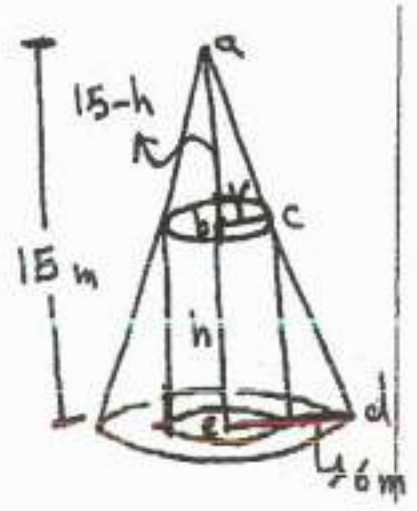
شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(15cm)$ وطول قطر قاعدته $(12cm)$.

Sol:

نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة $\mathbf{r} =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $\mathbf{h} =$



$\mathbf{V} = \pi \mathbf{r}^2 \mathbf{h} \ldots\ldots\ldots *$

من تشابه $\mathbf{aed}\ ,\ \mathbf{abc}\ \ \Delta\Delta$

$\frac{\mathbf{r}}{6} = \frac{15-\mathbf{h}}{15}$

$\mathbf{r} = \frac{6}{15}(15-\mathbf{h})$

(2/2019)

$\Rightarrow\ \mathbf{r} = \frac{2}{5}(15-\mathbf{h})$

نعوض في *

$\mathbf{V} = \frac{4\pi}{25}(15-\mathbf{h})^2 * \mathbf{h}$

$= \frac{4\pi}{25}(225 - 30\mathbf{h} + \mathbf{h}^2) * \mathbf{h}$

$= \frac{4\pi}{25}(225\,\mathbf{h} - 30\mathbf{h}^2 + \mathbf{h}^3)$

$\mathbf{V}' = \frac{4\pi}{25}(225 - 60\mathbf{h} + 3\mathbf{h}^2)\ ,\ \ \because \mathbf{V}' = 0$

$0 = 225 - 60\mathbf{h} + 3\mathbf{h}^2\} \div 3$

$\mathbf{h}^2 - 20\mathbf{h} + 75 = 0$

$\Rightarrow\ (\mathbf{h}-15)(\mathbf{h}-5) = 0$

$\mathbf{h} = 15$ يهمل $\qquad 15 > \mathbf{h} > 0$ حيث

$\mathbf{h} = 5\,\mathbf{m} \quad \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{6}{15}(15-5)$

$\mathbf{r} = 4\mathbf{m}$

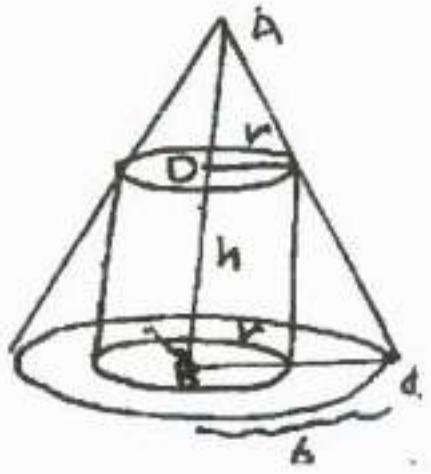
س جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$.

Sol:

نفرض حجم الاسطوانة $v =$

نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $h =$



$\therefore v = \pi r^2 h \ \ldots\ldots\ldots (1)$

من تشابه المثلثين $ADE\ ,ABC$

$\frac{r}{6} = \frac{8-h}{8}$

$\Rightarrow\ \ 8r = 48 - 6h$

$6h = 48 - 8r$

("خارج القطر" 1/2019)

$\Rightarrow\ h = \frac{\frac{1}{2}(24-4r)}{\frac{6}{3}} \ \ldots\ldots\ldots (2)$

$v = \pi r^2 \left(\frac{24-4r}{3}\right)$

$v = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$

$v' = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)$

$\left[0 = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)\right] * \frac{3}{\pi}$

$0 = 48r - 12r^2$

$\Rightarrow 0 = 4r - r^2$

$\Rightarrow\ \ 0 = r(4-r)$

أما $r = 0$ يهمل

او $4 - r = 0$

$\rightarrow r = 4\ cm$ نصف القطر

$h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}\ cm$ الارتفاع

س جد اكبر مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقية $4\sqrt{2}$ وحدة طول

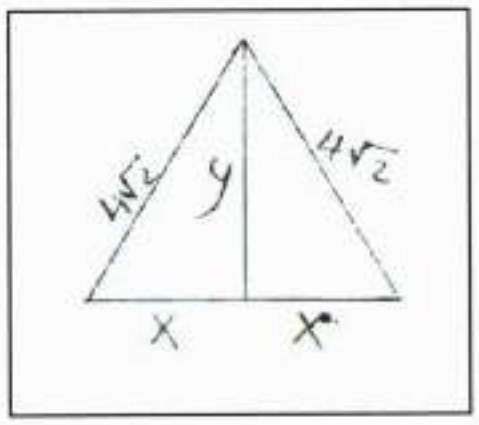
Sol:

نفرض طول القاعدة $2x=$

$y=$ ارتفاعه

$\because A=\frac{1}{2}(2x)\,.\,y$

$\therefore A=xy$ _____1



ملاحظة :في حالة تربيع المساحه

A=xy

وعوض الطالب يعطى درجه كامله

$x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow y^2=32-x^2$

$y=\sqrt{32-x^2}$ _____2

نعوض 2 في 1

("تطبيقي"1/2017)

$A=x\,.\,\sqrt{32-x^2}$

$A=\sqrt{32X^2-X^4}$

$A'=\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2.\sqrt{\text{الجذر}}}=\frac{64X-4X^3}{2.\sqrt{32X^2-X^4}}$

$0=\frac{64X-4X^3}{2.\sqrt{32X^2-X^4}}\Rightarrow 0=4X(16-X^2)$

اما $4X=0\Rightarrow X=0$ يهمل

او $16-X^2=0\Rightarrow X^2=16\Rightarrow X=4$

$Y=\sqrt{32-16}=\sqrt{16}=4$

$\therefore$ اكبر مساحه $A=xy=(4)(4)=16\ cm^2$

س جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران المثلث القائم الزاوية , طول وترة $9\sqrt{3}$ دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين .

Sol:

نفرض ارتفاع المخروط $h=$

نفرض نصف القطر للمخروط $r=$

المخروط $v=\frac{\pi}{3}r^2h$ _____1

حسب مبرهنة فيثاغورس (نجد علاقتين r, h)

$\therefore h^2+r^2=(9\sqrt{3})^2$

$r^2=243-h^2$ _____2

نعوض 2 في 1

$V=\frac{\pi}{3}(243-h^2)\,h$

$V=81\pi h-\frac{\pi}{3}h^3$

$v'=81\pi-3\ \frac{\pi}{3}h^2$

$0=81\pi-\pi h^2\ ]\div\pi$

$0=81-h^2\Rightarrow h^2=81$

$\Rightarrow h=+9cm$ الارتفاع

("تطبيقي"2/2017)

$r^2=243-81=162$

$v=\frac{\pi}{3}(162)\,.\,9^3$

$v=486\,\pi$ حجم اكبر مخروط دائري

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6cm بحيث راسة يكون في مركز الدائرة وقاعدته توازي قطرها .

Sol:

نفرض ارتفاع المثلث = h

نفرض طول القاعدة = 2x

نفرض المساحة = A

$A = \frac{1}{2}$. القاعدة . الارتفاع

$A = \frac{1}{2} . 2x . h = xh$

$A = xh$ ---------1

$\because (6)^2 = x^2 + h^2$ حسب مبرهنة فيثاغورس

$36 - h^2 = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{36 - h^2}$ -------2

$\therefore A = h\sqrt{36 - h^2}$

$-\sqrt{36h^2 - h^4}$

$A' = \frac{72h - 4h^3}{2\sqrt{36h^2 - h^4}}$

$0 = \frac{72h - 4h^3}{2\sqrt{36h^2 - h^4}}$

$[72h - 4h^3 = 0] \div 4$

$\Rightarrow 18h - h^3 = 0 \Rightarrow (18 - h^2) = 0$

اما $h = 0$ يهمل

او

$18 - h^2 = 0$

$\Rightarrow h^2 = 18 \Rightarrow h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\therefore x = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$A = (3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 9(2) = 18\ cm^2$

(2/2017"خارج القطر"تطبيقي")

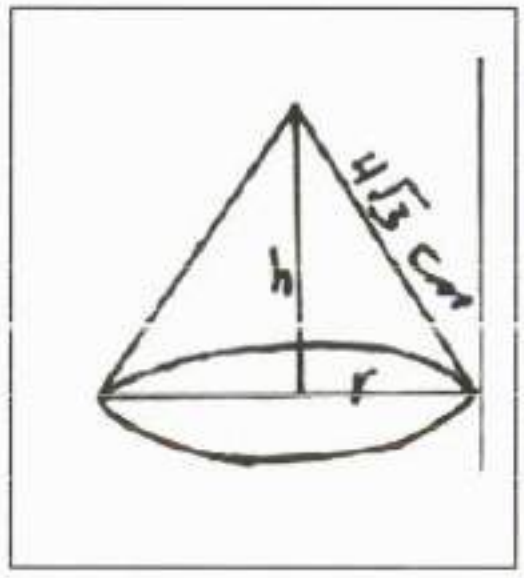
س جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وترة $(4\sqrt{3}\ cm)$ دورة كاملة حول احد ضلعية القائمين

Sol:

حسب نظرية فيثاغورس

$(4\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2$

$48 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 48 - h^2$



$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$= \frac{\pi}{3} (48 - h^2)\ h$

$= \frac{\pi}{3} (48h - h^3)$

$v' = \frac{\pi}{3} (48 - 3h^2) = 0$

$[\frac{\pi}{3} (48 - 3h^2) = 0] \div \frac{\pi}{3}$

$[48 - 3h^2 = 0] \div 3$

$16 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 16 \quad \therefore h = 4\ cm$

نعوض قيمة h في العلاقة

$r^2 = 48 - (4)^2$

$r^2 = 48 - 16$

$\therefore r^2 = 32$

(2018/"تمهيدي"تطبيقي")

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$V = \frac{\pi}{3} (32)(4)$

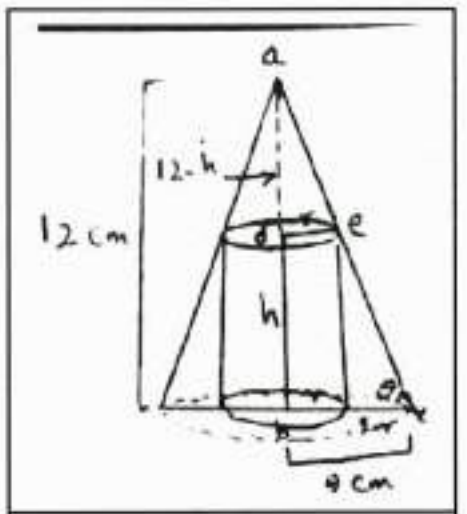
$\therefore v = \frac{128\pi}{3}\ cm^3$

ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجتان

شبكة المساعد
@SadsHelp

س جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمه يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه (12cm) ونصف قطره (9cm)

Sol:



الرسم والفرضية والقانون 3 درجات

نعوض ارتفاع الاسطوانة = h

ونصف قطر الاسطوانة = r

$v = \pi r^2 h$ ----------1

من تشابه ade,abc ΔΔ

$= \frac{adde}{abbc}$

$= \frac{12-h}{12} \frac{r}{9}$

$[12r = 9(12 - h)] \div 3$

$4r = 3(12 - h)$

$\frac{4r}{3} = 12 - h \Rightarrow h = 12 - \frac{4r}{3}$ ---------2

("تطبيقي"1/2018)

نعوض 2 في 1

$V = \pi r^2 (12 - \frac{4r}{3})$

$V = 12\pi r^2 - \frac{4r^3\pi}{3}$

س جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته (20 cm) (12cm) بحيث ان راسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والراسين الباقيين يقعان على ساقيه

Sol:

نفرض بعدي المستطيل x,y

$A = xy$.....(1)

من تشابه المثلثان btr , bcqΔΔ

$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bp}$

$\Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{12-x}{12}$

$Y = \frac{20}{12}(12 - x)$

$\Rightarrow y = \frac{5}{3}(12 - x)$ -------2

نعوض 2 في 1

$A = x(\frac{5}{3}(12 - x))$

("تطبيقي"3/2018)

$A = \frac{5}{3}(12x - x^2)$

$A' = \frac{5}{3}(12 - 2x)$

$\frac{5}{3}(12 - 2x) = 0] \div \frac{5}{3}$

$12 - 2X = 0$

$\Rightarrow X = 6$ cm

نعوض في 2

$y = \frac{5}{3}(12 - 6) \Rightarrow y = 10$ cm

شبكة المساعد
@SadsHelp

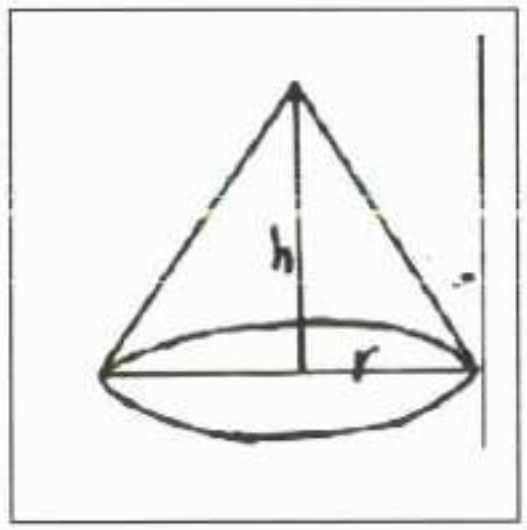
س جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وترة $(6\sqrt{3}\ cm)$ دورة كاملة حول احد ضلعية القائمين

Sol:

حسب نظرية فيثاغورس

$(6\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2$

$108 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 108 - h^2$



$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$= \frac{\pi}{3} (108-h^2)\ h$

$= \frac{\pi}{3} (108h-h^3)$

$v' = \frac{\pi}{3} (108 - 3h^2) = 0$

$[\frac{\pi}{3} (108 - 3h^2) = 0\ ] \div \frac{\pi}{3}$

$[108 - 3h^2 = 0\ ] \div 3$

$36 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 36 \quad \therefore h = 6\ cm$

نعوض قيمة h في العلاقة

$r^2 = 108 - (6)^2$

$r^2 = 108 - 36$

$\therefore r^2 = 72$

(1/2024 "محاولات تطبيقي")

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$V = \frac{\pi}{3} (72)(6)$

$\therefore v = 144\ cm^3$

ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجتان

شبكة المساعد
@SadsHelp