30 درجة في الوزاري

1 الاسئلة الوزارية حول "المجاميع العليا والسفلى"

س/ جد القيمة التقريبية للتكامل : $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$.

(2/2018"تطبيقي")

(1/2011"أسئلة خارج القطر")

Sol:

$\because \sigma = (1,2,3)$

∴ الفترات الجزئية هي $[1,2]$, $[2,3]$

$\because f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1} \rightarrow f^\backslash(x) = -3x^{-2} < 0$

$0 = \frac{-3}{x^2} \rightarrow 0 \neq -3$

∴ الدالة متناقصة

بداية الفترة الجزئية M

نهاية الفترة الجزئية m

الفترات الجزئية	h	m	M	hm	hM
[1,2]	1	3/2	3	3/2	3
[2,3]	1	1	3/2	1	3/2

$$\therefore L(\sigma,f) = \sum hm = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$U(\sigma,f) = \sum hm = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x}dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

س/ لتكن $f:[1,3] \Rightarrow R$ حيث $f(x)=2x^2$ جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 f(x)dx$ اذا قسمت الفترة [1,3] الى فترتين جزئيتين منتظمتين

(1/2012)

Sol :

$h = \frac{b-a}{a} = \frac{3-1}{2} = 1$

$\because f(x) = 2x^2 \Rightarrow f^\backslash(x) = 4x \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

ولان $\sigma = (1,2,3)$ لذلك سوف نقسم الفترة [1,3] الى قسمين وكما يلي :

[1,2], [2,3] وسيتم حساب كلا من المجموع الاعلى والمجموع الاسفل حسب الجدول التالي :

الفترة الجزئية [a,b]	طول الفترة $h_i = b-a$	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i\ m_i$	$h_i\ M_i$
[1,2]	2-1=1	$m_1=2$	$M_1=8$	$L_1=(1)(2)=2$	$U_1=(1)(8)=8$
[2,3]	3-2=1	$m_2=8$	$M_2=18$	$L_2=(1)(8)=8$	$U_2=(1)(18)=18$
				$L(\sigma,f)=10$	$U(\sigma,f)=26$

$$\int_1^3 f = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{10+26}{2} = \frac{36}{2} = 18\ unit^2$$

جد $U(\sigma,f), L(\sigma,f)$ حيث ان $\sigma = (-2,0,1), f(x) = 3 - x, f:[-2,1] \Rightarrow R$

(1/2012"أسئلة خارج القطر")

Sol:

$\sigma = (-2,0,1)$

$\because f(x) = 3 - x \Rightarrow f' = -1 < 0$

أي ان الدالة متناقصة في كل مجالها ولا توجد نقاط حرجة لذلك فان اصغر واكبر قيمة ستكون عند احد طرفي كل فترة ولان

$\sigma = (-2,0,1)$ لذلك سوف نقسم الفترة [-2,1] الى قسمين وكما يلي :

[-2,0][0,1] وسيتم حساب كلا من المجموع الاعلى والمجموع الاسفل حسب الجدول التالي

الفترة الجزئية [a,b]	طول الفترة $h_i = b-a$	$m_i = f(b)$	$M_i = f(a)$	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[-2,0]	0+2=2	$m_1=3-0=3$	$M_1=3+2=5$	$L_1=(2)(3)=6$	$U_1=(2)(5)=10$
[0,1]	1-0=1	$m_2=3-1=2$	$M_2=3-0=3$	$L_2=(1)(2)=2$	$U_2=(1)(3)=3$
				$L(\sigma,f) = \sum hi\ mi = 8$	$U(\sigma,f) = \sum hi\ Mi = 13$

نلاحظ ان $L(\sigma,f) = 8$, $U(\sigma,f) = 13$

$L(\sigma,f) \leq U(\sigma,f)$ وهما يمثلان المساحة العليا و المساحة السفلى لعدم وجود قيم سالبة للدالة

لتكن $f(x) = 3x - 3$ حيث $f:[1,4] \to R$, جد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma(1,2,3,4)$,ثم تحقق هندسياً بحساب المنطقة تحت المنحني f

(2014/"تمهيدي"أسئلة خارج القطر")

(1/2018)

Sol:

$f(x) = 3x - 3$ وبتجزئة $(1,2,3,4)$

$[1,2],[2,3],[3,4]$

$f'(x) = 2 > 0$

لاتوجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها

الفترات	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,4]	1	6	9	6	9
				9	18

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (3x-3)dx = \frac{U(\sigma,f) + L(\sigma,f)}{2} = \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2}\text{unit}^2$$

هندسيا مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}(\text{طول القاعدة}) \times (\text{الارتفاع})$$

$$A = \frac{1}{2}(4-1) \times (9)$$

$$= \frac{1}{2}(3) \times (9) = \frac{27}{2}\text{unit}^2$$

س جد قيمة التكامل التالي باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة $\int_1^5 x^3 dx$

(1/2014"أسئلة خارج القطر")

Sol:

$$h = \frac{b-a}{a} = \frac{5-1}{4} = 1 \Rightarrow \sigma = (1,2,3,4,5)$$

لذلك سوف نقسم الفترة [1,5] الى اربعة اقسام وكما يلي

[1,2],[2,3], [3,4],[4,5]

$$\because f(x) = x^3 \Rightarrow f^\backslash(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \notin [1,5]$$

وسيتم حساب كلا من المجموع العلى والمجموع الاسفل حسب الجدول التالي :

الفترة الجزئية [a,b]	طول الفترة $h_i = b-a$	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i\, m_i$	$h_i\, M_i$
[1,2]	2-1=1	$m_1=1$	$M_1=8$	$L_1=(1)(1)=1$	$U_1=(1)(8)=8$
[2,3]	3-2=1	$m_2=8$	$M_2=27$	$L_2=(1)(8)=8$	$U_2=(1)(27)=27$
[3,4]	4-3=1	$m_3=27$	$M_3=64$	$L_3=(1)(27)=27$	$U_3=(1)(64)=64$
[4,5]	5-4=1	$m_4=64$	$M_4=125$	$L_4=(1)(64)=64$	$U_4=(1)(125)=125$
				$L(\sigma,f) = 100$	$U(\sigma,f) = 224$

$$\int_1^5 f = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2} = 162 \ \text{unit}^2$$

س جد $L(\sigma,f), U(\sigma,f)$ حيث ان $\sigma = (1,2,3,4), \quad f(x) = 2x+5 \ , \ f:[1,4] \Rightarrow R$

Sol:

(1/2014"أسئلة النازحين")

$$\because f(x) = 5+2x \Rightarrow f^\backslash(x) = 2 > 0$$

اي ان الدالة متزايدة في كل مجالها ولا توجد نقاط حرجة لذلك فان اصغر واكبر قيمة ستكون عند احد الطرفين

وسيتم حساب كلا من المجموع الاعلى والمجموع الاسفل حسب الجدول التالي :[1,2],[2,3],[3,4]

الفترة الجزئية [a,b]	طول الفترة $h_i = b-a$	$m_i = f(a)$	$M_i = f(b)$	$h_i\, m_i$	$h_i\, M_i$
[1,2]	2-1=1	$m_1=5+2=7$	$M_1=5+4=9$	$L_1=(1)(7)=7$	$U_1=(1)(9)=9$
[2,3]	3-2=1	$m_2=5+4=9$	$M_2=5+6=11$	$L_2=(1)(9)=9$	$U_2=(1)(11)=11$
[3,4]	4-3=1	$m_3=5+6=11$	$M_3=5+8=13$	$L_3=(1)(11)=11$	$U_3=(1)(13)=13$
				$L(\sigma,f) = \sum hi\, mi = 27$	$U(\sigma,f) = \sum hi\, Mi = 33$

س جد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2-3)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4)$

(1/2015 "أسئلة النازحين") (3/2015) (2/2024)

Sol:

$\sigma = (2,3,4) \Rightarrow [2,3],[3,4]$

$f(x) = 3x^2 - 3$

$f^\backslash(x) = 6x \Rightarrow 0 = 6x \Rightarrow x = 0 \notin [2,4]$

اذا لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة

الفترات	h	m_i	M_i	$h_i\ m_i$	$h_i\ M_i$
$[2,3]$	1	9	24	9	24
$[3,4]$	1	24	45	24	45
				33	69

ملاحظة :- اذا كتب الطالب $\int_2^4 f(x) = \frac{33+69}{2}$ يعوض الخطوة الاخيرة ويعطى درجة كاملة

$L = \sum hi\ mi = 33$

$U = \sum hi\ Mi = 69$

$$\int_2^4 f(x)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

س جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_3^5 (2x^2-2)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (3,4,5)$

Sol:

(1/2016)

$f(x) = 2x^2 - 2$

$f^\backslash(x) = 4x \Rightarrow f^\backslash(x) = 0 \Rightarrow [4x = 0] \div (4) \Rightarrow x = 0 \notin [3,5]$

$\therefore$ لاتوجد نقاط حرجة ضمن الفترة $[3,5]$ والدالة متزايد في مجالها

الفترات $[3,4],[4,5]$

الفترات	h	m_i	M_i	$h_i\ m_i$	$h_i\ M_i$
$[3,4]$	1	16	30	16	30
$[4,5]$	1	30	48	30	48
				$L(\sigma,f) = 46$	$U(\sigma,f) = 78$

$$\int_3^5 (2x^2-2)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{78+46}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

ملاحظة :- اذا حل الطالب التكامل حسب القواعد التكاملية يعطى درجتان فقط اذا كان الناتج والحل صحيح

س لتكن $f: [1,5] \to R$, حيث $f(x) = x^2$,جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 dx$ باستخدام تجزئتين منتظمتين .

(2/2016"أسئلة خارج القطر")

(1/2017)

sol:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore \delta(1,2,3)$

$\because [1,2], [2,3]$ الفترات الجزئية $\therefore$

$\because f(x) = x^2 \quad \to f'(x) = 2x$

$0 = 2x \quad \to x = 0 \ \notin [1,3]$

لكن الدالة متزايدة في مجالها

$\therefore$ بداية الفترة m

نهاية الفترة M

الفترات	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9

$$\therefore L(\delta, f) = \sum hm_i = 1 + 4 = 5$$

$$U(\delta, f) = \sum hM_i = 4 + 9 = 13$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{L+U}{2} = \frac{5+13}{2} = 9$$

س لتكن $f: [1,5] \to R \ , f(x) = 3$, جد $\int_1^5 f(x)dx$ بتجزئتين منتظمتين وبالطريقة الهندسية.

Sol:

نقسم الفترة الى قسمتين متساويتين $[1,3]$, $[3,5]$

الفترات	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1,3]$	2	3	3	6	6
$[3,5]$	2	3	3	6	6
				12	12

$U(\sigma, f) = 12 \qquad L(\sigma, f) = 12$

$$\int_1^5 3\,dx = \frac{12+12}{2} = 12\text{unit}^2$$

(2017/"تمهيدي")

الشكل مستطيل

مساحة المستطيل = الطول x العرض

$A = (5-1) * 3 \quad = 4 * 3 = 12\text{unit}^2$

س: لتكن $f:[2,5]\to R$, حيث $f(x)=2x-3$, جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_2^5 f(x)dx$ وبتجزئة $\theta=(2,3,5)$ ثم جد المساحة هندسياً.

(3/2017)

Sol:

$f(x)=2x-3$ وبتجزئة $(2,3,5)$

$[2,3],[3,5]$

$f'(x)=2>0$

لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها

الفترات	h_i	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[2,3]$	1	1	3	1	3
$[3,5]$	2	3	7	6	14
				7	17

$U(\theta,f)=17\ ,L(\theta,f)=7$

$$\int_2^5 f(x)dx=\frac{U(\theta,f)+L(\theta,f)}{2}=\frac{7+17}{2}=\frac{24}{2}=12\text{unit}^2$$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) x الارتفاع

$A=\frac{1}{2}(1+7)*(5-2)\ =\frac{1}{\cancel{2}}*\cancel{8}^4*3=12\ \text{unit}^2$

س: اذا كانت $f(x):[0,4]\to R, f(x)=3x-x^2$, جد كل من $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ مستخدماً اربعة تجزينات منتظمة.

(2/2017 "أسئلة خارج القطر")

Sol:

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$

$\because [0,1],[1,2]\ ,[2,3],[3,4]$ الفترات هي $\therefore$

$\because f(x)=3x-x^2\ \ \to f'(x)=3-2x$

(2019/"تمهيدي")

$3-2x=0\ \ \to x=\frac{3}{2}\in[1,2]$

$[a,b]$	h_i	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				-2	$\frac{25}{4}$

$\therefore L(\sigma,f)=-2$

$U(\sigma,f)=\frac{25}{4}$

س جد $L(\sigma,f)$ و $U(\sigma,f)$ للدالة $f(x) = 4x - x^2$, حيث $f(x): [0,4] \to R$, باستخدام اربع تجزيئات منتظمة.

(2018/"تمهيدي")

Sol:

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$

$\therefore$ الفترات هي $[0,1], [1,2], [2,3], [3,4]$ $\because$

$\because f(x) = 4x - x^2 \quad \to f'(x) = 4 - 2x$

$4 - 2x = 0 \quad \to x = 3 \in [0,4]$

$[a,b]$	h_i	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				6	14

$\therefore L(\sigma,f) = 6$

$U(\sigma,f) = 14$

س لتكن $f: [1,3] \to R$ حيث $f(x) = x^2$ جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 dx$ اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين .

(2/2019)

Sol:

$f(x) = x^2$

$f^\backslash(x) = 2x \Rightarrow f^\backslash(x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

$[1,2], [2,3]$ الفترات الجزئية هي

الفترات	h	m	M	himi	hiMi
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
				5	13

$\therefore \int_1^3 x^2\,dx = \frac{L(\sigma+f)+U(\sigma+f)}{2}$

$\cong \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9\ \text{unit}^2$

س لتكن $R \rightarrow [1,5]:$, حيث $f(x) = 3x - 2$, جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$

(3/2019)

Sol:

$f(x) = 3x - 2$

$f^\backslash(x) = 3 \neq 0$

لاتوجد نقطة حرجة والدالة متزايدة

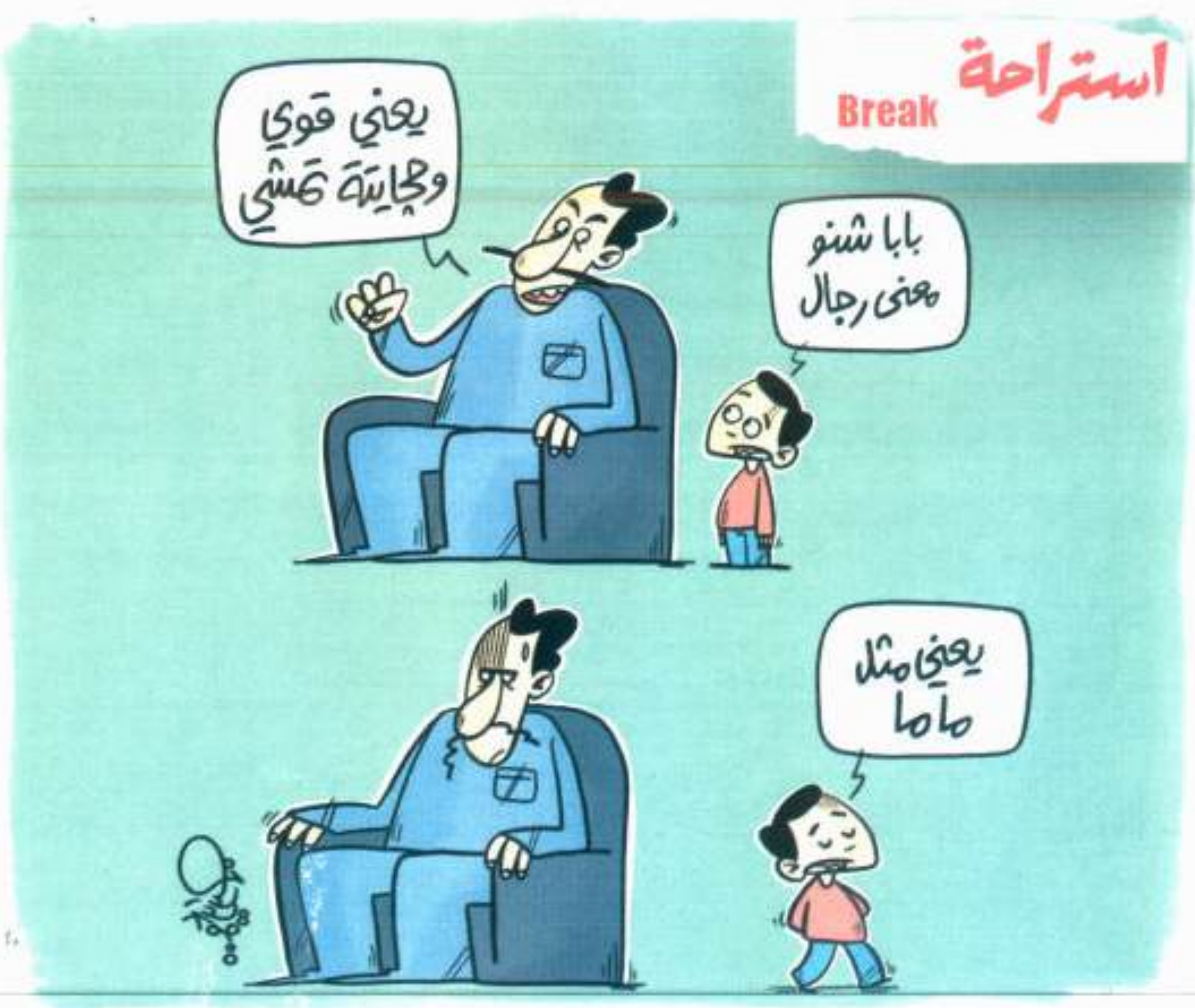
وان σ قد تجزأت الى الفترات $[1,2], [2,3], [3,5]$

الفترات	h_i طول الفترة	m_1	M_1	$L(\sigma, f)$	$u(\sigma, f)$
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	7	4	7
$[3,5]$	2	7	13	14	26
				19	37

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 (3x-2)dx$

$\cong \frac{L(\sigma,f)+u(\sigma,f)}{2} = \frac{19+37}{2}$

$= \frac{56}{2} = 28$



س / جد قيمة التكامل $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

sol :

(1/1996)

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^3$$

$$= 2(2-1) = 2$$

س / اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$ جد قيمة $a \in R$

sol :

(1/1998)

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left[(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) = -2$$

$$\rightarrow 2a^2 - a^4 = -8$$

$$\rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2-4)(a^2+2) = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 4 = 0$$

$$\rightarrow a^2 = 4$$

$$\rightarrow a = \mp 2 , a^2 + 2 \neq 0$$

س / جد قيمة التكامل $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$

sol :

(1/1997)

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 2x(x^2-15)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(x^2-15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2-15)^3}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(64-15)^3} - \sqrt{(16-15)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(343-1) = \frac{342}{3} = 114$$

س / اذا كان $\int_a^b (2x+3)\ dx = 12$,وكان $a + 2b = 3$ جد قيمتي $a, b \in R$

sol :

(2/1998)

$$\int_a^b (2x+3)\ dx = 12$$

$$\rightarrow [(x^2+3x)]_a^b = 12$$

$$(b^2+3b) - (a^2+3a) = 12$$

$$\rightarrow b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = 3 - 2b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$b^2 + 3b - (3-2b)^2 - 3(3-2b) = 12$$

$$b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 - 6b - 12 = 0$$

$$-3b^2 + 12b - 30 = 0] \div -3$$

$$\rightarrow b^2 - 7b + 10 = 0$$

$$(b-2)(b-5) = 0$$

اما $b = 2 \rightarrow a = -1$

او $b = 5 \rightarrow a = -7$

س جد قيمة التكامل $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$

sol :

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\ 2xdx = \left[(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

(1/2000)

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_0^4$$

(1/2002)

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(16+9)^3}-\sqrt{(0+9)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{25^3}-\sqrt{9^3}\right]$$

(2/2005)

$$=\frac{1}{3}(125-27)=\frac{98}{3}$$

س جد قيمة التكامل $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$

sol :

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$$

(1/2001)

$$=\int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\right]_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3}-\sqrt{(0)^3}\right)=\frac{2}{3}(216)=144$$

س جد $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

sol :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$=\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}dx$$

(2/2001)

$$=\frac{-1}{2}\int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$=\frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

س اذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة $a\in R$

sol :

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}xdx = 2$$

(1/2004)

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}2xdx = 2$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\rightarrow = \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$\left(\sqrt{16+9}\right)-\left(\sqrt{a^2+9}\right)=2 \ \rightarrow \sqrt{25}-\sqrt{a^2+9}=2$$

$$\sqrt{a^2+9}=3 \ \rightarrow a^2+9=9 \ \rightarrow a^2=0 \ \rightarrow a=0$$

س جد $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

sol :

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

(2/2003)

$$=\int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^2}$$

$$=\int_0^1 (3-2x)^{-2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$=\frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

س جد $\int_0^4 \sqrt{x}\,(x+6)dx$

sol :

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,(x+6)dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,(x+6)dx$$

(1/2002)

$$=\int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+6\,.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+4\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5}+4\sqrt{4^3}\right)-(0)$$

$$=\frac{64}{5}+32=\frac{224}{5}$$

س جد $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{3x^3-2x^5}$

sol :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}dx$$

(2/2003)

$$=\int_{-1}^{1}(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}x\,dx$$

(1/2015"خارج القطر")

$$=\frac{-1}{4}\int_{-1}^{1}(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4)x\,dx$$

$$=\frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{-3}{16}(1-1)=0$$

س جد $\int_1^2\frac{1}{(5-2x)^2}dx$

sol :

$$\int_1^2\frac{1}{(5-2x)^2}dx$$

$$=\int_1^2(5-2x)^{-2}dx=\frac{-1}{2}\int_1^2(5-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$=\frac{1}{2}[(5-2x)^{-1}]_1^2$$

(1/2006)

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

س جد $\int_1^2\frac{dx}{(3x-4)^2}$

sol :

$$\int_1^2\frac{dx}{(3x-4)^2}$$

$$=\int_1^2(3x-4)^{-2}dx$$

(2/2006)

$$=\frac{1}{3}\int_1^2(3x-4)^{-2}(3)dx$$

$$=\frac{-1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2$$

$$=\frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{-1}\right)=\frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-1}{2}$$

س جد $\int_0^7\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

sol :

$$\int_0^7\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$$

$$=\int_0^7(x+1)^{\frac{-1}{3}}dx$$

(2008/"تمهيدي")

$$=\frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$$

$$=\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7$$

$$=\frac{3}{2}(4-1)=\frac{9}{2}$$

س اذا كان $\int_a^b f(x)dx=5$, $\int_c^b f(x)dx=3$,

وكانت $c\in[a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)dx$

sol :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

(1/2008)

$$\to 5=\int_a^c f(x)dx+3\to\int_a^c f(x)dx=2$$

س اذا كان $\int_1^3 g(x)dx=2$, $\int_1^3 f(x)dx=6$,

جد $\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]dx$

sol :

$$\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]dx$$

(2/2010)

$$=\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx+\int_1^3 4x\,dx$$

$$6-2+[2x^2]_1^3$$

$$=4+(18-2)$$

$$=20$$

جد $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

sol :

(1/2009)

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\int_0^1 (x^2+1)^{-2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,2x\,dx$$

$$=\frac{-1}{2}[(x^2+1)^{-1}]_0^1$$

$$=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{4}$$

جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$

sol :

(1/2010)

(1/2019"تطبيقي")

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx=[x-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$$

جد $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx$

sol :

(2/2008)

(2/2009)

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}dx$$

$$=\int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}dx$$

$$\int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx \quad = 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$=2\left((8+1)^{\frac{1}{2}}-(3+1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2*3-2*2=6-4=2$$

جد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2x}{2+\tan x}dx$

sol :

(1/2011)

(3/2016)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2x}{2+\tan x}dx$$

$$=[\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln|2+\tan\frac{\pi}{4}|-\ln|2+\tan(-\frac{\pi}{4})|$$

$$=\ln|2+1|-\ln|2-1|=\ln 3-0=\ln 3$$

جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}\sin x\,dx$

sol :

(1/2011"خارج القطر")

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}(-\sin x)\,dx$$

$$=-[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-[e^{\cos\frac{\pi}{2}}-e^{\cos 0}]=-(e^0-e^1)$$

$$=-(1-e)=e-1$$

جد قيمة التكامل $\int_{-3}^4|x|dx$

Sol:

(1/2011)

$$f(x)=|x| =\begin{cases} x\,,\forall x\ \ge 0 \\ -x\,,\forall x\ \le 0\end{cases}$$

$$f(0)=0$$

$\lim_{x\to 0^{(+)}} f(x)=0\ L_1=$, $\lim_{x\to 0^{(-)}} f(x)=0\ L_2$

$\because L_1=L_2=0$ الغاية موجودة

$\because f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$ الدالة مستمرة

$$\int_{-3}^4 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx$$

$$=\int_{-3}^0 f(-x)dx+\int_0^4 f(x)dx$$

$$=[-\frac{1}{2}x^2]_{-3}^0+[\frac{1}{2}x^2]_0^4$$

$$=\left[(0)-\left(\frac{-9}{2}\right)\right]+[(8)-(0)]$$

$$=\frac{9}{2}+8=\frac{25}{2}=12.5$$

جد قيمة التكامل $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx$

sol :

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx = [\frac{(1+e^x)^3}{3}]_0^1$$

(1/2011) (2/2013) (2016/"تمهيدي") (3/2023 "تكميلي") (2023/تمهيدي " تطبيقي")

$$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - (1+e^0)^3]$$

$$= \frac{1}{3}[((1+e^1)^3 - (1+1)^3]$$

$$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - 8]$$

جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

sol :

(2/2011)

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$$

$$= [\ln|x^3+4x+1|]_0^1$$

$$= \ln|1+4(1)+1| - \ln|0+0+1|$$

$$= \ln|6| - \ln|1| = \ln 6 - \ln 1$$

$$= \ln 6 - 0 = \ln 6$$

جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

sol :

(2012/"تمهيدي") (2015/"تمهيدي") (3/2019)

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$$

$$= \ln|16+9| - \ln|0+9|$$

$$= \ln 25 - \ln 9 = \frac{\ln 25}{\ln 9}$$

جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x \, dx$

sol :

(2012/"تمهيدي")

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -[(\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|) - (\ln|\cos 0|)]$$

$$= -\left[\left(\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right) - (\ln|1|)\right] = -\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right) = -\ln\frac{1}{2}$$

جد قيمة التكامل $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

sol :

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2dx) = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

(1/2012) (1/2014) (2/2016)

$$= \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{\ln 25} - e^{\ln 9}]$$

$$= \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}(16) = 8$$

جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$

(1/2012"خارج القطر")(2/2012)(2/2015)(2/2021"احيائي")(1/2024)

sol :

$$u = \sqrt{x}\ , du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$$

جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

sol :

(3/2013) (2/2014) (2/2024)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) = \frac{1}{2}$$

جد قيمة $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$

sol :

(1/2014"خارج القطر") (1/2024" محاولات تطبيقي")

$$\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$$

$$= \int_1^2 x e^{\ln x^{-1}} x \, dx$$

$$= \int_1^2 e^{\ln\frac{1}{2}} x \, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}(x) dx$$

$$= \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

س جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

sol :

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

(2014/"تمهيدي")

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

(3/2019) (1/2015)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[x^2+x]_1^a$$

$$= 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2}[(a^2+a)-(1^2+1)]$$

$$= 2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+a-2) = 2(1-0) \Rightarrow \frac{1}{2}[a^2+a-2)$$

$$= 2] \times 2$$

$$a^2+a-2 = 4 \Rightarrow a^2+a-6 = 0$$

$$\Rightarrow (a+3)(a-2) = 0$$

either $a+3=0 \Rightarrow a=-3$ or $a-2=0 \Rightarrow a=2$

س اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2 , \forall x \ge 0 \\ 2x , \forall x < 0 \end{cases}$, جد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ ؟

sol :

نثبت ان الدالة مستمرة على [-1, 3]

معرفة $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f(3) = 3(0)^2 = 0$

$$\lim_{x\Rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\Rightarrow 0^+} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1 \\ \lim_{x\Rightarrow 0^-} 2x = 2(0) = 0 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \lim_{X\to 0} f(x) = 0$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

(1/2014)

∴ الدالة f مستمرة عند $x = 0$

كذلك الدالة مستمرة على كل من {x: x<0}, { x: x>0}

∴ الدالة مستمرة على R

∴ الدالة مستمرة على [-1, 3]

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2x\, dx + \int_{0}^{3} 3x^2\, dx$$

$$= [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_0^3$$

(2017/"تمهيدي")

$$= [0-1] + [27-0]$$

$$= -1 + 27 = 26$$

س اثبت ان $\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$

sol:

(3/2023"تكميلي")

$$\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & 3x-6 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2 \\ -(3x-6) & 3x-6 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$= 6 - 3x$$

(2/2017"خارج القطر")

$\therefore$ LHS $\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx$

(2019/"تمهيدي")

$$= \int_{-2}^{2} (6-3x)\, dx + \int_{2}^{4} (3x-6)\, dx$$

(3/2014)

$$= \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4$$

(2/2021"تطبيقي")

$$= \left[\left(12-\frac{12}{2}\right)-\left(-12-\frac{12}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{48}{2}-24\right)-\left(\frac{12}{2}-12\right)\right]$$

$$= [(12-6)-(-12-6)] + [(24-24)-(6-12)]$$

$$= 6 + 18 + 6 = 30 = RHS$$

س جد قيمة $\int_2^5 x\, e^{-\ln x}\, dx$

sol :

$$\int_2^5 x\, e^{-\ln x}\, dx = \int_2^5 x\, e^{\ln x^{-1}}\, dx$$

$$= \int_2^5 x\, e^{\ln\frac{1}{x}}\, x\, dx$$

(1/2015"أسئلة النازحين")

$$= \int_2^5 \frac{1}{x}\,(x)\, dx \qquad [\,e^{\ln x} = x \text{ حيث}]$$

$$= \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5 - 2 = 3$$

س جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\, dx$

sol :

(1/2016"خارج القطر")

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

sol :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{-1}{2}} x \cos x \, dx$$

$$= [\frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

(2015/"تمهيدي")

(2023/ 2"تطبيقي")

$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \sqrt{2}$$

اثبت ان $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$

جد قيمة $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

sol :

$$\text{LHS} \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{-2}{3}}\right) dx$$

$$= 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\right) dx$$

(2/2015"خارج القطر")

$$= 3\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

(1/2019)

$$= 3\left(\frac{2}{3}\right)\left[\sqrt{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3}\right]_1^8$$

$$= 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{8} - 1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1} - 1)^3}\right]$$

$$= 2\sqrt{(1)^3} - 2\sqrt{(0)^3} = 2 = \text{RHS}$$

لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$

دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

sol :

$f(x) = x^2 + 2x + k$

$y = -5$ يعني -5 النهاية الصغرى تساوي

$f'(x) = 2x + x \Rightarrow 0 = 2x + 2$

$\Rightarrow 2x = -2 \quad \Rightarrow x = -1$

$\therefore$ عند $x = -1$ نهاية صغرى

$\therefore$ النقطة (-1, -5) نهاية صغرى نعوضها في الدالة

$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$

$\Rightarrow -5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 4$

(2016/"تمهيدي")

$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x - 4)dx = [\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 - 8\right) - \frac{1}{3} + 1 - 4$$

$$= \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 5 = 3 - 9 = -6$$

f(x) دالة مستمرة على الفترة [-2, 6] فاذا كان

$\int_{-2}^{6} [F(x) + 3]dx = 32$ وكان $\int_{1}^{6} f(x)dx = 6$

فجد $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

sol :

$$\int_{-2}^{6} [f(x) + 3]dx = 32$$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$

(1/2016)

$$\int_{-2}^{6} 3\,dx = [3x]_{-2}^{6}$$

(2/2019)

$= 3(6) - 3(-2)$

(1/2024" محاولات تطبيقي")

$= 18 + 6 = 24$

$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx + 24 = 32$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)dx = 8$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{6} f(x)dx$$

$$8 = \int_{-2}^{1} f(x)dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)dx = 2$$

س / جد قيمة $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

sol :

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx$$

(4/2015"أسئلة النازحين")

$$= -[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3$$

(2018/"تمهيدي")

$$= -[(9+\frac{9}{2}+3)-(\frac{8}{3}+2+2)]$$

$$= -[\frac{33}{2}-\frac{20}{3}]$$

(2023/تمهيدي"احيائي")

$$= -(\frac{99-40}{6}) = \frac{-59}{6}$$

س / اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

sol :

نجد نقطة الانقلاب

$$F(x) = (x-3)^3+1$$

$$\acute{F}(x)=3(x-3)^2(1) = 3(x-3)^2$$

$$\acute{F}(x) = 6(x-3)(1) = 6(x-3)$$

$$\Rightarrow [0 = 6(x-3)] \div 6$$

(4/2015"أسئلة النازحين")

$$\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$F(3) = (3-3)^3+1 = 0+1 = 1$$

$\therefore$ نقطة الانقلاب هي $(3, 1)$

نقطة الانقلاب هي (a, b)

(1/2017)

$$\therefore a=3, b=1$$

(1/2019"خارج القطر")

$$\therefore \int_0^b f'^{(x)}dx - \int_0^a f''(x)dx$$

(2/2023"أحيائي")

$$= \int_0^1 3(x-3)^2dx - \int_0^3 6(x-3)dx$$

$$= 3[\frac{(x-3)^3}{3}]_0^1 - 6[\frac{(x-3)^2}{2}]_0^3$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 - 3[(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3-(0-3)^3] - 3[(3-3)^2-(0-3)^2]$$

$$= [-8+27] - 3[0-9]$$

$$= 19 + 27 = 46$$

س / جد قيمة اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2x, \forall x \geq 3 \\ 6, \forall x < 3 \end{cases}$

جد $\int_1^4 f(x)dx$ ؟

sol :

نثبت ان الدالة مستمرة على $[1, 4]$

معرفة $f(x) = 2x \Rightarrow f(3) = 2(3) = 6$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to3^+}(2x) = 2(3) = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to3^-} 6 = 6 = L_2 \end{cases}$$

موجودة $\therefore L_1 = L_2 = 6 \Rightarrow \lim_{x\Rightarrow3} f(x) = 6$

$\therefore$ الدالة f مستمرة عند $\therefore \lim_{x\Rightarrow3} f(x) = f(3) = 6, x = 3$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x<3\}, \{x: x>3\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على R

(2/2016"خارج القطر")

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[1, 4]$

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4$$

$$= [18-6] + [16-9] = 12+7 = 19$$

س / جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

sol :

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$$

(2017/"تمهيدي")

$$= 2\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= 2[e^{\sqrt{x}}]_1^4$$

$$= 2(e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}) = 2(e^2 - e)$$

س / جد قيمة التكامل $(\sqrt{x}+2)^2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

sol :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2dx$$

(2/2017"أسئلة الموصل")

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= [\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1$$

$$= (\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3}) - (0+0+0)$$

$$= \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

جد قيمة التكامل $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$

sol :

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$$

$$\int_1^3 \left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx$$

(2/2020"تطبيقي")

$$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$$

$$=\left[\frac{2x^2}{2}-4x+5\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3$$

$$=\left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$=\left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5)$$

$$=\left(-3-\frac{5}{3}\right)-(-8)=\frac{-14}{3}+8=\frac{10}{3}$$

لتكن $f(x)=|2x-4|$ ، جد $\int_{-3}^4 f(x)dx$

sol :

$$f(x)=\begin{cases}2x-4 & , \ x\ge 2\\ 4-2x & , \ x<2\end{cases}$$

(2/2024"محاولات")

f دالة مستمرة

(1/2020"تطبيقي")

$$\int_{-3}^4 f(x)\ dx=\int_{-3}^2(4-2x)dx+\int_2^4(2x-4)dx$$

$$=\left[4x-\frac{2x^2}{2}\right]_{-3}^2+\left[\frac{2x^2}{2}-4x\right]_2^4$$

$$=[(8-4)-(-12-9)]+[(16-16)-(4-8)]$$

$$=[(4+2)]+[0+4]$$

$$=25+4$$

$$=29$$

اثبت ان $F(x)=1-\cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sin x$ حيث $F:[0,\frac{\pi}{6}]\Rightarrow R$

حسب المبرهنة الاساسية للتكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$

sol :

F(x) دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F(x)=1-\cos x$$
$$F'(x)=\sin x=f(x)$$

$\therefore F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)$$

$$=\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]-[1-\cos(0)]$$

(1/2017)

$$=\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]-[1-1]$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

جد قيمة التكامل $\int_0^2 |x-1|\ dx$

Sol:

حسب التعريف للقيمة المطلقة

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases}(x-1)\ ,\forall x\ \ge 1\\ (1-x)\ ,\forall x\ <1\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 |x-1|\ dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$$

$$=[x-\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^2}{2}-x]_1^2$$

(2/2017)

$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right]+\left[(\frac{1}{2}-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2/2023 "أحياني")

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي $F(x)=\sin x,\ F:[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow R$

جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

sol :

$F(x)=\sin x$ دالة مقابلة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-f(0)=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$

(2/2017"خارج القطر")

$$=1-0\ =\ 1$$

س جد قيمة التكامل $\int_{4}^{1} \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$

sol :

$\int_4^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)dx$

$= -\int_1^4 (x+\sqrt{x})\,dx$ **(1/2020)**

$= -\int_1^4 (x+x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$= -\left[\left(\frac{16}{2}+\frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right]$

$= -\left[\left(8+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{3+4}{6}\right)\right]$

$= -\left[\frac{24+16}{3}-\frac{7}{6}\right] = -\left[\frac{40}{3}-\frac{7}{6}\right]$

$= -\left(\frac{80-7}{6}\right) = \frac{73}{6}$

س جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

sol :

$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \left[\ln|x^2+9|\right]_0^4$

$= \ln(16+9) - \ln(0+9)$

$= \ln 25 - \ln 9$ **(1/2020"تطبيقي")**

$= \ln\frac{25}{9} - \ln\left(\frac{5}{3}\right)^2$ **(2/2022"احيائي")**

$= 2\ln\frac{5}{3}$

س اثبت فيما اذا كانت $F(x) = x^3 - 7$ ، $F:[1,3] \to$ هي دالة مقابلة للدالة $F(x) = 3x^2$ ، $f:[1,3] \to R$ ثم جد $\int_1^3 f(x)\,dx$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل

sol :

1) الدالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لانها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(1,3)$ لانها كثيرة الحدود

$F'(x) = 3x^2 = f(x)\,\forall\, x \in (1,3)$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $F(x)$

$\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1)$

$= (3^3-7)-(1^3-7)$ **(3/2020)**

$= (27-7)-(-6)$

$= 20+6 = 26$

س جد قيمة التكامل $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

sol :

$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

$\int_1^3 x^{-2}(2x^3-4x^2+5)\,dx$

$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$

$= \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3$ **(2020/"تمهيدي"تطبيقي")**

$= \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$

$= \left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5)$

$= \left(-3-\frac{5}{3}\right)-(-8)$

$= -3-\frac{5}{3}+8$

$= 5-\frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

س/ جد قيمة (b) اذا علمت ان: $\int_0^b 3x\sqrt{x^2+16}\,dx = 61$

sol :

$$\frac{3}{2}\int_0^b 2x\,(x^2+16)^{\frac{1}{2}}\,dx = 61$$

$$\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^b = 61$$

(2/2021"احيائي")

$$(b^3+16)^{\frac{3}{2}} - (2^4)^{\frac{3}{2}} = 61$$

$$(b^2+16)^{\frac{3}{2}} - 64 = 61$$

$(b^2+16)^{\frac{3}{2}} = 125$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$(b^2+16)^{\frac{1}{2}} = 5$ بتربيع الطرفين

$$b^2+16 = 25$$

$$b^2 = 9$$

$$b = \mp 3$$

س/ اثبت ان $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R,\ F(x) = \sin x + x$

sol :

الدالة $F(x)$ مستمرة على $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

$$F'(x) = \cos x + 1 = f(x)$$

$\therefore F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

(2021/"تمهيدي"تطبيقي")

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)$$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right) - (\sin 0 + 0)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

س/ اثبت ان $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ ، $F(x) = \sin x + x$

حيث $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$, ثم احسب : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

sol :

$$f(x) = 1 + \cos x$$

$F(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق

$$F'(x) = \cos x + 1 = f(x)$$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ مقابلة للدالة $f(x)$

(1/2020)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right] - [\sin(0) + 0]$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right] - [0]$$

$$= \frac{3+\pi}{6}$$

س/ لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ و $f(x)$ دالة لها نهاية صغرى محلية تساوي (-5) ، جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

sol :

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

f' : ---- -1 ++++

$(-1,-5)$ نقطة نهاية صغرى محلية $\in$ وتحقق الدالة

(2/2020"تطبيقي")

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$$

$$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow -5 = -1 + k \Rightarrow k = -4$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\therefore \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{27}{3} + 9 - 12\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4\right)$$

$$= (9 + 9 - 12) - \left(\frac{1}{3} - 3\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{3} + 3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

س

جد قيمة التكامل $\int_{-2}^{4}|3x-6|\,dx$

sol :

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & \forall x \ge 2 \\ -3x+6 & \forall x < 2 \end{cases}$$

$$= \int_{-2}^{2}(-3x+6)\,dx + \int_{2}^{4}(3x-6)\,dx$$

$$= \left[\frac{-3x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= \frac{-3(2)^2}{2} + 6(2) - \frac{-3(-2)^2}{2} + 6(-2) + \frac{3(4)^2}{2} - 6(4) - \frac{3(2)^2}{2} - 6(2)$$

$$= [-6+12] - [-6-12] + [24-24] - [6-12]$$

$$= [6] - [-18] + [0] - [-6]$$

$$= 6 + 18 + 6$$

$$= 30$$

(2/2021"تطبيقي")

س

لتكن $f(x) = x^2 - 4x + k$ دالة حيث $K \in R$ نهايتها الصغرى (-1) ، جد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

sol :

$$f(x) = x^2 - 4x + k$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

عندما $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

وهي نقطة تنتمي للدالة $(2, -1)$ اصبحت النهاية الصغرى فتحققها ونعوض بالدالة المعطاة

$$-1 = (2)^2 - 4(2) + K$$

$$-1 = 4 - 8 + K \Rightarrow K = 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

(2/2022"احيائي")

$$\therefore \int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4^2\underset{1}{\frac{x^2}{2}} + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) - \left(\frac{-1}{3} - 2 - 3\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 5\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 5$$

$$= \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6$$

س

جد قيمة اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \forall x \ge 1 \\ 3, \forall x < 1 \end{cases}$

جد $\int_0^5 f(x)dx$ ؟

sol :

نثبت ان الدالة مستمرة على $[0, 5]$

معرفة $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1^+}(2x+1) = 2(1) + 1 = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$$

موجودة $\therefore L_1 = L_2 = 6 \Rightarrow \lim_{X\Rightarrow3} f(x) = 6$

$\therefore$ الدالة f مستمرة عند $\therefore \lim_{X\Rightarrow1} f(x) = f(1) = 3, x = 1$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x<1\}, \{x: x>1\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على R

(2023/تمهيدي "احيائي")

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[0, 5]$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 6\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3(1) - 0] + [(5)^2 + 5) - (1^2 + 1)]$$

$$= 3 + (30 - 2) = 3 + 28 = 31$$

س

جد قيمة $\int_1^3 3x\, e^{\ln x}\,dx$

sol :

$$\int_1^3 3x\,e^{\ln x}\,dx = \int_1^3 3x\,x\;dx$$

$$= \int_1^3 3x^2\;dx = [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

(1/2023"تطبيقي")

س

جد $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}(x + \cos x)\,dx$

sol :

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}(x + \cos x)\,dx$$

(1/2023"أحيائي")

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0} = [0 + 0] - \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{8} - 1\right] = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

س: جد تكامل الاتي : $\int_{0}^{2} |x-1| dx$

sol :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \ge 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$\because 1 \in [0\,,2]$

التكامل يجزأ.:.

(2/2023"أحيائي")

$$\int_{0}^{2} |x-1| dx = \int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx$$

$$= \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[-\frac{(1-1)^2}{2} + \frac{(1-0)^2}{2}\right] + \left[\frac{(2-1)^2}{2} - \frac{(1-1)^2}{2}\right]$$

$$= \left(0+\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - 0\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

س: جد قيمة $\int_1^2 2x^2\, e^{-\ln x}\, dx$

sol :

$$\int_1^2 2x^2\, e^{-\ln x}\, dx = \int_1^2 2x^2\, x^{-1}\; dx$$

$$= \int_1^2 2x\; dx$$

(3/2023"أحيائي")

$$= [x^2]_1^2 = 4 - 1 = 3$$

س: جد قيمة $\int_1^3 3x^3\, e^{-\ln x}\, dx$

sol :

$$\int_1^3 3x^3\, e^{-\ln x}\, dx = \int_1^3 3x^3\, \cancel{e}^{\cancel{\ln}(x)^{-1}}\; dx$$

$$= \int_1^3 3x^{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

(2/2024)

$$= \int_1^3 3x^2\; dx$$

$$= [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

س: جد قيمة a اذا علمت ان $\int_{-1}^{a} (x + x^3)\; dx = \frac{-9}{4}$

sol :

$$\int_{-1}^{a} (x + x^3)\; dx = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{2a^2+a^4}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-9}{4}$$

(3/2023"أحيائي")

$$\frac{2a^2 + a^4 - 1 + 9}{4} = 0$$

$$2a^2 + a^4 + 8 = 0\,]\; * -1$$

$$a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2-4)(a^2+2) = 0$$

اما $a^2 + 2 = 0$ يهمل

او $a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$

س: جد قيمة $\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1}\, dx$

sol :

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\, dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} dx$$

$$= -\int_2^3 (x+1)dx$$

(3/2023"تكميلي")

$$= -[\frac{(x+1)^2}{2}]_2^3$$

$$= -[\frac{(3+1)^2}{2} - \frac{(2+1)^2}{2}]$$

$$= -[\frac{16}{2} - \frac{9}{2}]$$

$$= \frac{-7}{2}$$

س إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3, 5]$ وكان $\int_{-3}^{5}[f(x) + 2x]dx = 54$ و $\int_{1}^{5} f(x)dx = 12$ فجد $\int_{-3}^{1} f(x)dx$

sol :

(1/2024)

$$\int_{-3}^{5}[f(x) + 2x]dx = 54$$

$$\int_{-3}^{5} f(x)dx + \int_{-3}^{5} 2x\, dx = 54$$

$$\int_{-3}^{5} \left[f(x) + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_{-3}^{5} = 54$$

$$\int_{-3}^{5} f(x)\, dx + [25 - 9] = 54$$

$$\int_{-3}^{5} f(x)\, dx + 16 = 54$$

(1/2024"محاولات أحياني")

$$\int_{-3}^{5} f(x)\, dx = 54 - 16 = 38$$

$$\because \int_{-3}^{5} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx$$

$$38 = \int_{-3}^{1} f(x)dx + 12$$

$$\therefore \int_{-3}^{1} f(x)dx = 38 - 12 \Rightarrow \int_{-3}^{1} f(x)dx = 26$$

س جد قيمة $\int_{1}^{3} \frac{(x^2-x)^4}{x^4} dx$

sol :

الطريقة الأولى :

$$\int_{1}^{3} (\frac{x^2 - x}{x})^4 dx = \int_{1}^{3} (x - 1)^4 dx$$

(1/2024)

$$= [\frac{(x - 1)^5}{5}]_1^3$$

$$= \frac{1}{5}[(3 - 1)^5 - (1 - 1)^5]$$

$$= \frac{1}{5}[32 - 0] \quad = \frac{32}{5}$$

الطريقة الثانية :

$$\int_{1}^{3} \frac{[x(x - 1)]^4}{x^4} dx = \int_{1}^{3} \frac{x^4(x - 1)^4}{x^4} dx$$

$$\int_{1}^{3} (x - 1)^4 dx$$

(1/2024"محاولات أحياني")

$$= [\frac{(x - 1)^5}{5}]_1^3$$

$$= \frac{1}{5}[(3 - 1)^5 - (1 - 1)^5]$$

$$= \frac{1}{5}[32 - 0] \quad = \frac{32}{5}$$

س جد قيمة $\int x(x^2+3)^3 dx$

(1/2003)

sol :

$$\int x(x^2+3)^3 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (x^2+3)^3 2x dx$$
$$= \frac{1}{8}(x^2+3)^4 + c$$

س جد قيمة $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx$

sol :

(1/2007)

$$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{4}} 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{4}} + c$$
$$= \frac{2}{7}\sqrt[4]{(x^2+1)^7} + c$$

س جد قيمة $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$

(2010/"تمهيدي")

(3/2016)

sol :

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$$
$$= \int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int (2x+3)^{\frac{3}{2}} 2dx$$
$$= (\frac{2}{5})(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5} + c$$

س جد قيمة $\int x.e^{x^2} dx$

(3/2013)

sol :

$$\int x.e^{x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

س جد قيمة $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$

(3/2014)

sol :

$$\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$$
$$= \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\, dx \quad = \int e^{x-2} dx$$
$$= e^{x-2} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$

(4/2014"أسئلة الانبار")

sol :

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$$
$$= \frac{1}{6}\ln(3x^2+5) + c$$

س جد قيمة $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

(2/2015)

sol :

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx$$
$$= \int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} dx$$
$$= 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}} dx$$
$$3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{5}{3}} + c \quad = \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

(2/2016)

(1/2023"أحيائي")

sol :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}} x^{\frac{-1}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}} \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}(2)(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= 2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx$

sol :

(1/2016"خارج القطر")

$$\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx$$
$$= \int \frac{(x-3)}{2^3(x-3)^3}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-3)^2}dx \quad = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}dx$$
$$= \frac{1}{8}(-1)(x-3)^{-1} + c \quad = \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$

sol :

(2/2019"تطبيقي")

نجد مشتقة داخل القوس

$\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\sqrt{5}}{2}\,.x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{\sqrt{7x}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7x}}\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{x^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7x}}\int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 .x^{-\frac{1}{2}}\ d$$

∴ نضرب $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ونقسم عليها

$$= \frac{-2}{\sqrt{5}} * \frac{1}{\sqrt{7}} * \int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 * \frac{-\sqrt{5}}{2}\ x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{-2^1}{\sqrt{35}} * \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^8}{8^4} + C = \frac{-1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5x}\right)^8 + C$$

س جد قيمة $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

sol :

(2/2019)

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} * x^{-\frac{3}{4}}\ dx$$
$$= -2\int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{2}\ x^{\frac{-1}{2}}\right)\ dx$$
$$= \frac{-2\left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{-4}{3}\left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

س جد قيمة $\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}}\,dx$

sol :

(3/2017)

$$\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{7}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\,dx)$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^4}{4} + c$$
$$= \frac{-\left(2-\sqrt{7x}\right)^4}{2\sqrt{35}} + c$$

س جد قيمة $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}$

sol :

(1/2019"تطبيقي")

$$\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\ dx$$
$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\ dx$$
$$= \int x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$
$$= \frac{1}{-10}\int -10x\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx$$
$$= \frac{-1}{10}\cdot\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{-1}{10}\cdot\frac{3}{4}\,(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{-3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

س جد قيمة $\int (x^2+4)^2\,xdx$

sol :

(2/2020"تطبيقي")

$$\int (x^2+4)^2\,xdx$$

يمكن الحل بطريقة فتح القوس ثم التوزيع.

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+4)^2\,2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^3}{3} + C$$

س جد قيمة $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\ dx$

sol :

$$\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\ dx$$ (3/2020)

$$\int \sqrt[3]{(x+5)^2}\ dx$$ (3/2023"تطبيقي")

$$\int (x+5)^{\frac{2}{3}}\ dx = \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\ \sqrt[3]{(x+5)^5} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{xdx}{(3x^2+7)^4}$

sol :

$$\int \frac{x\ dx}{(3x^2+7)^4} = \int (3x^2+7)^{-4}\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int (3x^2+7)^{-4}\, 6x\, dx$$ (3/2020"تطبيقي")

$$= \frac{1}{6} * \frac{(3x^2+7)^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{18\,(3x^2+7)^3} + c$$

س جد تكامل: $\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

sol :

(2021/"تمهيدي"تطبيقي")

(2022/"تمهيدي"تطبيقي")

$$\int \frac{2x}{x^2+9}\ dx$$

$$= \ln|x^2+9| + c$$

* ملاحظة اذا لم يذكر الطالب المطلق يعطى درجة كاملة

س جد قيمة التكامل $\int x^5(\frac{2}{x} - 3x)^4 dx$

sol :

$$\int x^5(\frac{2}{x} - 3x)^4 dx = \int x^5(\frac{2-3x^2}{x})^4 dx$$

$$= \int x^5 \cdot \frac{(2-3x^2)^4}{x^4}\, dx$$ (3/2023"احيائي")

$$= \frac{-1}{6}\int (2-3x^2)^4(-6x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{6} \cdot \frac{(2-3x^2)^5}{5} + c = \frac{-1}{30}\,(2-3x^2)^5 + c$$

س جد قيمة $\int x\sqrt[5]{\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}}\ dx$

Sol:

$$\int x\ \sqrt[5]{\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}}\ \ dx$$

$$= \int x\ \sqrt[5]{\frac{x-2}{x^5}}\ \ dx$$

$$= \int \cancel{x} \cdot \frac{\sqrt[5]{x-2}}{\cancel{x}}\ \ dx$$ (1/2021"احيائي")

$$= \int (x-2)^{\frac{1}{5}}\ dx$$

$$= \frac{(x-2)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{6}(x-2)^{\frac{6}{5}} + C$$

س جد قيمة $\int \frac{\sqrt{x-3}}{2x-6}\,dx$

Sol:

الطريقة الأولى

$$= \int \frac{\sqrt{x-3}}{2(x-3)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(\sqrt{x-3})}}{2\,\cancel{(\sqrt{x-3})}.\,(\sqrt{x+3})}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\ (x+3)^{\frac{-1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2} . 2(x+3)^{\frac{1}{2}} + c$$ (2/2021"احيائي")

$$= \sqrt{x+3} + c$$

الطريقة الثانية:

$$\int \frac{\sqrt{x-3}}{2x-6}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x-3}}{2x-6} . \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x-3}}{2\,\cancel{(x-3)}\,(\sqrt{x-3})}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\int (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} . \frac{2}{1}\sqrt{x-3} + c$$

$$= \sqrt{x-3} + c$$

جد قيمة $\int(8x+12)\sqrt{2x+3}\,dx$

(2/2024)

sol :

$$\int(8x+12)\sqrt{2x+3}\,dx$$
$$=\int 4(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=2\int(2x+3)^{\frac{3}{2}}\,2\,dx$$
$$=2\left(\frac{2}{5}\right)(2x+3)^{\frac{5}{2}}+c$$
$$=\frac{4}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+c$$

س/ جد قيمة التكاملات : 1) $\int(\sin x - 3\sec^2 x)dx$
2) $\int \cos 6x \cos 3x\, dx$

sol :

1) $\int(\sin x - 3\sec^2 x)dx = -\cos x - 3\tan x + c$

2) $\int \cos 6x \cos 3x\, dx = \int(1-2\sin^2 3x)\cos 3x\, dx$

$= \int \cos 3x\ dx - 2\int \sin^2 3x \cos 3x\ dx$

$= \frac{1}{3}\int \cos 3x\ 3dx - 2\cdot\frac{1}{3}\int \sin^2 3x\ 3\cos 3x\ dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + c$

(1/1996)

س/ جد قيمة $\int(\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)dx$

sol :

$\int(\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)dx$

$= \int(\sec^2 x - \sin^2 x)dx$

(2/1996)

$\int\left[\sec^2 x - \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]dx$

$= \int\left[\sec^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)\right]dx$

$\tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

س/ جد قيمة $\int \cos 2x \sin^2 x\, dx$

sol :

$\int \cos 2x \sin^2 x\, dx$

$= \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$

(1/1997)

$= \int\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x\right)dx$

$= \int\left[\frac{1}{2}\cos 2x - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(1+\cos 4x)\right]dx$

$= \int\left[\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right]dx$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$

س/ جد قيمة $\int(1+\cos 3x)^2\, dx$

sol :

$\int(1+\cos 3x)^2\, dx$

(2/1997)

$= \int[1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x]\, dx$

$= x + 2(\frac{1}{3}\sin 3x) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{6}\sin 6x) + c$

$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

(2/2013)

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

س/ جد قيمة $\int(\cos x - \sin 2x)^2 dx$

sol :

(1/1998)

$\int(\cos x - \sin 2x)^2 dx$

$= \int(\cos^2 x - 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x)dx$

$\int[\frac{1}{2}(1+\cos 2x) - 2.2\sin x \cos x \cos x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)]\, dx$

$= \int(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$= \int(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$

س/ جد قيمة $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

sol :

$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

$= \int(\sin x . \cos x)^2\, dx$

(1/2001)

$= \int(\frac{1}{2}\sin 2x)^2\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$

جد قيمة $\int \sin^4 x\,dx$

sol :

(1/2000)

$$\int \sin^4 x\,dx$$
$$= \int [\sin^2 x]^2\,dx$$
$$= \int [\frac{1}{2}(1-\cos 2x)]^2\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int [1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int [1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x]\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right]dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+c$$

جد قيمة $\int (\sin^2 x+1)\,dx$

sol :

(2006/"تمهيدي")

$$\int (\sin^2 x+1)\,dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+x+c$$

جد قيمة $\int \tan 2x\sec^3 2x\,dx$

sol :

$$\int \tan 2x\sec^3 2x\,dx$$
$$= \int \sec^2 2x\ \ \sec 2x\tan 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\ \ 2\sec 2x\tan 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sec^3 2x+c$$
$$= \frac{1}{6}\sec^3 2x+c$$

(1/2008"خارج القطر")

جد قيمة $\int \cos^2 2x\sin x\,dx$

sol :

(2/2008)

$$\int \cos^2 2x\sin x\,dx$$
$$= \int (\cos 2x)^2\sin x\,dx$$
$$= \int (2\cos^2 x-1)^2\sin x\,dx$$
$$= \int (4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)\sin x\,dx$$
$$= 4\int \cos^4 x\sin x\,dx-4\int \cos^2 x\sin x\,dx+\int \sin x\,dx$$
$$= -4\int \cos^4 x(-)\sin x\,dx+4\int \cos^2 x(-)\sin x\,dx+\int \sin x\,dx$$
$$= \frac{-4}{5}\cos^5 x+\frac{4}{3}\cos^3 x-\cos x+c$$

جد قيمة $\int \cos^3 x\,dx$

sol :

(2/2008"خارج القطر")

(3/2019)

$$\int \cos^3 x\,dx$$
$$= \int \cos x\,x\,dx$$
$$= \int \cos x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= \int (\cos x-\sin^2 x\ \cos x)\,dx$$
$$= \sin x-\left(\frac{1}{3}\right)\sin^3 x+c$$

جد قيمة $\int \tan 3x\sec^5 3x\,dx$

sol :

$$\int \tan 3x\sec^5 3x\,dx$$
$$= \int \sec^4 3x\ \ \sec 3x\tan 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \sec^4 3x\ \ 3\sec 3x\tan 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\sec^5 3x+c$$
$$= \frac{1}{15}\sec^5 3x+c$$

(2009/"تمهيدي")

س جد قيمة $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

sol :

(2010/"تمهيدي")

(1/2014"خارج القطر")

(2/2021"احيائي")

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x . \cos^2 x}{1-\sin x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)} dx$$

$$= \int (1+\sin x)\cos x\, dx = \frac{1}{2}(1+\sin x)^2 + c$$

س جد قيمة $\int \cot x \csc^3 x\, dx$

sol :

(2/2012)

(2019/"تمهيدي")

$$\int \cot x \csc^3 x\, dx$$

$$= \int \csc^2 x(\csc x \cot x) dx$$

$$= -\int \csc^2 x(-\csc x \cot x) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

س جد قيمة $\int \csc^2 x \cos x\, dx$

sol :

(1/2013)

$$\int \csc^2 x \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

س جد قيمة $\int \sqrt{1-2\sin 2x}\, dx$

sol :

(1/2013"خارج القطر")

(4/2014" أسئلة الانبار")

$$\int \sqrt{1-2\sin 2x}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$$

$$= \mp \int (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \mp(-\cos x - \sin x) + c$$

س جد قيمة $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

sol :

(1/2014)

(1/2015)

(1/2019"خارج القطر"تطبيقي")

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

س جد قيمة $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx$

sol :

(3/2014)

$$\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx$$

$$= \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x\, dx$$

$$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x\, dx$$

$$= 2(\frac{-1}{3})\int \cos^3 3x\, (-3)\sin 3x\, dx$$

$$= \frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4 3x + c$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

س جد قيمة $\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$

sol :

(1/2015)

$$\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 8\sec^2 8x\, e^{\tan 8x} dx$$

$$= \frac{1}{8} e^{\tan 8x} + c$$

س جد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

sol :

(1/2015" أسئلة النازحين")

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

$$= \int (\sin x)^{\frac{-1}{3}} \cos x\, dx$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

س جد قيمة
a) $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$
b) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$

sol :

a) $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx = \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x \, dx$

$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x \, dx$ (1/2016)

$= (2)(\frac{-1}{3})\int \cos^3 3x\,(-3\sin 3x)\, dx$

$\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\cos^4 3x + c = \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$

b) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$ (3/2016"خارج القطر")

$= \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x} dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x \, dx$

$= \frac{-1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} (-2)\csc^2 2x \, dx$

$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} 2x + c$

$= \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$

س جد قيمة $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$

sol :

$\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$ (3/2016"خارج القطر")

$= \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x} dx$ (2017/"تمهيدي")

$= \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x \, dx$ (2/2020)

$= \frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} (-2)\csc^2 2x \, dx$

$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} 2x + c = \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$

س جد قيمة $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$

sol :

$\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ (1/2017" أسئلة الموصل")

$\int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}\, dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$

$= \pm \int (\sin x - \cos x)\, dx$

$= \pm[-\cos x - \sin x] + c = \pm(\cos x + \sin x) + c$

س جد قيمة $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$

sol :

$\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$

$= \int (\sin^2 2x + 2\sin 2x\cdot\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

$= \int (1 + \sin 4x)\, dx$ (4/2015" أسئلة النازحين")

$= x - \frac{1}{4}\cos 4x + c$

س جد قيمة $\int \tan x \, dx$

sol :

$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ (2016/"تمهيدي")

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$= -\ln|\cos x| + c$

س جد قيمة $\int \tan^3 2x\, dx$

sol :

$\int \tan^3 2x\, dx$

$= \int \tan 2x \tan^2 2x\, dx$

$= \int \tan 2x(\sec^2 2x - 1)\, dx$ (2/2017)

$= \int (\tan 2x \sec^2 2x - \tan 2x)\, dx$

$= \int \tan 2x \sec^2 2x\, dx - \int \tan 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \tan 2x \sec^2 2x.(2x)dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 2x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

$= \frac{1}{4}\cdot\tan^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

س: جد قيمة $\int (\cos^4x - \sin^4x)\,dx$

sol :

$$\int (\cos^4x - \sin^4x)\,dx$$

$$= \int (\cos^2x - \sin^2x)(\cos^2x + \sin^2x)\,dx$$

$$= \int \cos 2x\,dx$$

(1/2017"خارج القطر")

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

س: جد قيمة $\int \frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}\,dx$

sol :

$$\int \frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}\,dx = \int \frac{\sec^2x}{\tan^3x}\,dx$$

$$= \int \tan^{-3}x \sec^2x\,dx$$

(3/2017 "أسئلة الموصل")

$$= \frac{\tan^{-2}x}{-2} + c$$

(2/2018)

$$= \frac{-1}{2\tan^2x} + c$$

(2023/تمهيدي " تطبيقي ")

س: جد قيمة $\int \frac{\tan\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$

sol:

$$\int \frac{\tan\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\tan\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

(3/2018)

$$= \int \tan\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \tan\theta \cdot \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{2} + c$$

س: جد تكامل : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

sol :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$$

(2019/"تمهيدي"تطبيقي")

$$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

س: جد قيمة $\int x^2 \sin x^3\,dx$

sol:

$$\int x^2 \sin x^3\,dx$$

(3/2017)

$$= \frac{1}{3} \int \sin x^3 (3x^2)\,dx$$

(1/2023"تطبيقي")

$$= \frac{1}{3}(-\cos x^3) + c$$

س: جد قيمة $\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\,dx$

sol :

$$\int (\sec^2 3x) \cdot e^{\tan 3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\,dx$$

(2018/"تمهيدي")

$$= \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + c$$

س: جد قيمة $\int [\tan x - \sec^2 x]\,dx$

sol :

(1/2024 "محاولات تطبيقي")

$$\int [\tan x - \sec^2]\,dx$$

$$= \int \tan x\,dx - \int \sec^2\,dx$$

(1/2018)

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx - \int \sec^2\,dx$$

$$= -\ln|\cos x| - \tan x + c \quad = \ln|\sec x| - \tan x + c$$

س: جد تكامل :- $\int \sec^2 3x e^{\tan 3x}\,dx$

sol :

$$\frac{1}{3} \int 3\sec^2 3x e^{\tan 3x}\,dx$$

(1/2019)

$$= \frac{1}{3}\ e^{\tan 3x} + C$$

س: جد قيمة $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$

sol :

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$$

(2/2019"تطبيقي")

$$= \int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \pm \int (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \pm(-\cos x - \sin x) + C$$

(2/2023"تطبيقي")

جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2\,dx$

sol :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2 dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+2\sin x.\cos x+\cos^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx$

(1/2019"تطبيقي")

$= \left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\cos 0\right)$

$= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)$

$= \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{2}+1$

جد قيمة $\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}dx$

sol :

$\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}\,dx = \int\frac{\cos^2 3x-\sin^2 x}{\cos 3x-\sin 3x}\,dx$

$= \int\frac{(\cos 3x-\sin 3x)\,(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos 3x-\sin 3x}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int\cos 3x * 3\,dx+\frac{1}{3}\int\sin 3x * 3\,dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

طريقة ثانية :-

$\int\frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x} * \frac{\cos 3x+\sin 3x}{\cos 3x+\sin 3x}\,dx$

(2/2019)

$= \int\frac{\cos 6x\,(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}$

$= \int\frac{\cos 6x(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos 6x}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int\cos 3x * 3\,dx+\frac{1}{3}\int\sin 3x * 3\,dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

جد التكاملات التالية :-

1) $\int_1^2 8x\,e^{-\ln x}\,dx$

2) $\int\frac{\cos 4x}{(\cos 2x-\sin 2x)}\,dx$

sol :

1) $\int_1^3 8xe^{-\ln x}\,dx$

$= \int_1^3 8x^{\ln x^{-1}}$

(1/2019"خارج القطر "تطبيقي")

$= \int_1^3 8x\,x^{-1}\,dx$

$= \int_1^3 8\,dx = [8\,x\,]_1^2 = (8x)-(8x)$

$= 8(2)-8(1)$

$= 16-8 = 8$

2) $\int\frac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}\,dx$

$= \int\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\cos 2x-\sin 2x}\,dx$

$= \int\frac{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}{(\cos 2x-\sin 2x)}\,dx$

$= -\sin 2x+\cos 2x\;+C$

جد قيمة $\int\cot^3 5x\;dx$

sol :

$\int\cot^3 5x\;dx$

(2020/"تمهيدي"تطبيقي")

$= \int\cot^2 5x\;.\cot 5x\;dx$

$= \int(\csc^2 5x-1)\cot 5x\;dx$

$= \int(\csc^2 5x\;.\cot 5x-\cot 5x)\;dx$

$= \int(\csc^2 5x\;.\cot 5x-\frac{\cos 5x}{\sin 5x})\;dx$

$= \frac{-1}{5}.\frac{\cot^2 5x}{2}-\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|+c$

$= \frac{-1}{10}\cot^2 5x-\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|+c$

جد تكامل: $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

sol :

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\tan x\ dx$$

الطريقة الاولى

$$= \int \sec^2 x \tan x\ dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

الطريقة الثانية

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\tan x\ dx$$
$$= \int \sec x \sec x \tan x\ dx$$

(3/2020"تطبيقي")

$$= \frac{\sec^2 x}{2} + c$$

الطريقة الثالثة

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\ dx = \int \sin x \cos^{-3} x\, dx$$
$$= \frac{-\cos^{-2} x}{-2} + c$$
$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + c = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$$

جد تكامل: $\int \sqrt{1-2\sin 2x}\,dx$

sol :

$$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - osx)^2}\,dx$$

(2/2020"تطبيقي")

$$= \pm \int (\sin x - \cos x)\,dx$$
$$= \pm(\cos x + \sin x) + C$$

جد تكامل: $\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

sol :

$$2\int \csc^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$$
$$= -2\cot\sqrt{x} + C$$

(2021/"تمهيدي "تطبيقي")

جد تكامل: $\int \sin 6x\ \cos^2 3x\ dx$

sol :

$$\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx$$
$$= \int 2\sin 3x \cos 3x\ .\cos^2 3x\ dx$$
$$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x\ dx$$

(1/2020)

$$= \frac{-2}{3}\int \cos^3 3x\ (-3\sin 3x)dx$$
$$= \frac{-\cancel{2}}{3}\ \frac{\cos^4 3x}{\underset{2}{\cancel{4}}} + c$$
$$= -\frac{1}{6}\cos^4 3x + c$$

جد تكامل: $\int e^{\cos x}\sin x\ dx$

sol :

$$\int e^{\cos x}\sin x\ dx$$

(1/2020)

$$-\int e^{\cos x}(-\sin x)\ dx$$
$$= -e^{\cos x} + c$$

اثبت أنّ الدالة $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ، $F: R \to R$ دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$ حيث $f: R \to R$ ، ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل.

sol :

$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق.

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 2$$
$$= \cos 2x = f(x)$$

$\therefore F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(0)\right]$$

(2/2020)

$$= \frac{1}{2}[1-0]$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int (\sin^4 x)\ dx$$

sol :

(3/2020)

$$\int (\sin^4 x) dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

sol :

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$\int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\ dx$$

(2/2020)

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

جد التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\ dx$

sol :

(1/2021"تطبيقي")

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\ dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

ممكن الطالب يحل بتحول $\sec x$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

ممكن حل اخر

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^{-2} x \sin x\, dx = \left[\frac{-\cos^{-1} x}{-1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[\frac{1}{\cos x}\right] = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0}$$

(2021/"تمهيدي "تطبيقي")

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

$$\int (3 - \sin x)^2 dx$$

sol :

(1/2020"تطبيقي")

$$\int (3 - \sin x)^2 dx$$

$$= \int (9 - 6\sin x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int 9\ dx - 6\int \sin x\ dx + \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\ dx$$

$$= 9x + 6\cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$= \frac{19}{2}x + 6\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int x e^{3\ln x}\ dx$$

sol :

(1/2020"تطبيقي")

$$\int x e^{3\ln x}\ dx = \int x\, e^{\ln x^3} dx$$

$$= \int x \cdot x^3\ dx = \int x^4\ dx = \frac{x^5}{5} + c$$

اثبت ان $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ حيث $F: R \to R$

هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$

حيث $f: R \to R$ ثم جد $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\ dx$

sol :

1) $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ مستمرة على R

$\therefore$ مستمرة بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2) $f'(x) = \cos 2x = f(x)$

$\therefore F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

طريقة اولى

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F(0)$$

(2020/"تمهيدي")

$$= \frac{1}{2}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2 \cdot (0)$$

$$= \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

ملاحظة

اذا الطالب حل التكامل بطريقة قوانين التكامل يعتبر صحيح لان بالسؤال لم يحدد الطريقة

الطريقة الثانية

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2 \cdot (0)$$

$$= \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int \cos 2x \sin x \ dx$$

sol :

(1/2021"احيائي")

$$\int \cos 2x . \sin x \ dx$$
$$= \int (2\cos^2 x - 1). \sin x \ dx$$
$$= \int 2\cos^2 x \ . \sin x - \int \sin x \, dx$$
$$= \frac{-2\cos^3 x}{3} + \cos x + C$$

الطريقة الثانية

$$\int \cos 2x . \sin x \ dx$$
$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) . \sin \ x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x . \sin x \ dx \ - \int \sin^3 x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x \ . \sin x \ dx - \int \sin^2 x \ . \sin x \ dx$$
$$= \int \cos^2 x \ . \sin x \, dx - \int [1 - \cos^2 x] . \sin \ x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x \ . \sin x \ dx - \int \sin x \ dx +$$
$$\int \cos^2 x \ . \sin x \ dx$$
$$= \frac{-\cos^3 x}{3} + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$
$$= \frac{-2}{3}\cos^3 x + \cos x + C$$

الطريقة الثالثة

$$\int \cos 2x \sin x \ dx$$
$$= \int (1 - 2\sin^2 x) . \sin x \ dx$$
$$= \int (\sin x - 2\sin^3 x) \ dx$$
$$= \int \sin x \ dx - 2 \int \sin^2 x \ . \sin x \ dx$$
$$= \int \sin x \ dx - 2 \int (1 - \cos^2 x) \ . \sin x \ dx$$
$$= \int \sin x \ dx - 2 \int \sin x - \cos^2 x \ \sin x \ dx$$
$$= \int \sin x \ dx - 2 \int \sin x \ dx +$$
$$2 \int \cos^2 x \sin x \ dx$$
$$= -\int \sin x \, dx - 2 \int \cos^2 x \ (-\sin x) \ dx$$
$$= \cos x - \frac{2\cos^3 x}{3} + C$$

جد تكامل : $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ dx$

sol :

(2022/"تمهيدي "احيائي")

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ dx = -\int_0^{\ln 2} e^{-x} . dx$$
$$= -[e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\ln 2} - e^0]$$
$$= -[e^{\ln 2^{-1}} - e^0] = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

جد تكامل : $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \ dx$

sol :

الطريقة الأولى

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \ dx \quad = \int \tan x \ . \sec^2 x \ dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

الطريقة الثانية

(2021/"تمهيدي"تطبيقي")

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x} \ dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos^2 x} \ dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \ dx \ = -\int \cos^{-3} x \ (-\sin x) dx$$
$$= \frac{-\cos^2 x}{-2} + c \ = \frac{1}{2} \sec^2 x + c$$

جد تكامل كل مما يأتي : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x . \sin x \ dx$

sol :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x . \tan x \ dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} \ dx$$
$$= -\ln[|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\left(\ln \cos \frac{\pi}{3}\right) - (\ln \cos 0)\right]$$
$$= -\left[\ln \left(\frac{1}{2}\right) - \ln \ (1)\right]$$
$$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \ldots\ldots\ldots *$$
$$= \ln 2$$

(1/2023"أحيائي")

ملاحظة : اذا وصل الطالب الى الخطوة (*) يعطى درجة كاملة

جد تكامل $\int(\sin^2 8x)\ dx$

sol :

(2023/تمهيدي "احيائي")

$$\int(\sin^2 8x)dx$$
$$= \int \frac{1}{2}\,(1-\cos 16x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{16}\sin 16x\right] + c$$
$$= \frac{X}{2} - \frac{\sin 16x}{32} + c$$

جد تكامل $\int xe^{4\ln x}\ dx$

sol :

(2023/تمهيدي "احيائي")

$$\int xe^{4\ln x}\,dx$$
$$= \int x\, e^{\ln x^4} dx$$
$$= \int x\,.\,x^4\,dx$$
$$= \int x^5\ dx = \frac{x^6}{6} + c$$

جد قيمة $\int \cot^3 x\ dx$

sol :

(3/2023"احيائي")

$$\int \cot^3 x\ dx$$
$$= \int \cot^2 x\ .\cot x\ dx$$
$$= \int(\csc^2 x - 1)\cot x\ dx$$
$$= \int(\csc^2 x\ .\cot x - \cot x)\ dx$$
$$= \int(\csc^2 x\ .\cot x - \frac{\cos x}{\sin x})\ dx$$
$$= \frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + c$$

جد تكامل كل مما يأتي : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,.\sin^2 x\ dx$

sol :

(2/2023"احيائي")

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,.\sin^2 x\,dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin x\,.\cos x\,.\sin^2 x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^3 x\,.\cos x\ dx$$
$$= \left[2\frac{\sin^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(\sin^4 x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^4 - (\sin 0)^4\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0\right]$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

جد تكامل $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\ dx$

sol :

(2/2023"احيائي")

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$
$$= \sin(\ln(x)) + c$$

جد قيمة $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx$

sol :

(3/2023"تكميلي")

$$\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x.\sin^2 x}{1-\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x(1+\cos x)\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}}dx$$
$$= \int \sin x\ dx + \int \underbrace{\sin x\cos x}_{\text{مشتقة}}\ dx$$
$$= -\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

$$\int \cos^4 3x \, dx$$

sol :

(1/2024) (1/2024"محاولات احياني")

$$\int \cos^4 3x \, dx$$

$$= \int (\cos^2 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 12x\right] dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

أ-المساحة المحددة بمنحني دالة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفتر $[1,3]$

(1/1998)

sol :

$if\ y = 0 \rightarrow x^2 - 4x^2 = 0$

$\rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$\rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \notin [1,3]$ OR $x^2 = 4$

$\rightarrow x = 2 \in [1,3]\ , x = -2 \notin [1,3]$

$A = |\int_1^2 f(x)dx| + |\int_2^3 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_1^2 (x^4 - 4x^2)dx| + |\int_2^3 (x^4 - 4x^2)dx$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_1^2| + |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_2^3|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) - (\frac{1}{5} - \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3}) - (\frac{32}{5} - \frac{32}{3})|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3})|$

$= |(\frac{31}{5} - \frac{28}{3})| + |(\frac{211}{5} - \frac{76}{3})| = |(\frac{93-140}{15})| +$

$= |(\frac{633-380}{15})|\ = |(\frac{-47}{15})| + |(\frac{253}{15})|$

$= \frac{300}{15} = 20$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات بالفتر $[-3,3]$

(1/2001)

(1/2015)

sol :

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 9x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$\rightarrow x = 0 \in [-3,3]$ OR $x^2 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3 \in [-3,3]$

$A = |\int_{-3}^0 f(x)dx| + |\int_0^3 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_{-3}^0 (x^3 - 9x)dx| + |\int_0^3 (x^3 - 9x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_{-3}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_0^3|$

$= |(0) - (\frac{81}{4} - \frac{81}{2})| + |(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}) - (0)|$

$|(\frac{81}{4})| + |(\frac{-81}{4})| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفتر $[-2,2]$

(2007/"تمهيدي")

sol :

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\rightarrow x = 0 \in [-2,2]$ OR $x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm 2 \in [-2,2]$

$A = |\int_{-2}^0 f(x)dx| + |\int_0^2 f(x)dx|$

$\therefore A = |\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx| + |\int_0^2 (x^3 - 4x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_{-2}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_0^3|$

$= |(0) - (4 - 8)| + |(4 - 8) - (0)|$

$|(4)| + |(-4)| = 4 + 4 = 8$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

(2006/"تمهيدي")

(1/2013)

(3/2023"تطبيقي")

sol :

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0$ OR $x = 2$ OR $x = 1$

$A = |\int_0^1 f(x)dx| + |\int_1^2 f(x)dx|$

$A = |\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx| + |\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_0^1| + |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_1^2|$

$= |(\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0)| + |(4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)|$

$= |(\frac{1}{4})| + |(-\frac{1}{4})|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات.

(1/2005)

(1/2019"خارج القطر")

(2/2019)

sol :

نجعل $y=0$ $\quad y=x^3+4x^2+3x$

$0=x^3+4x^2+3x$

$\Rightarrow x(x^2+4x+3)=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x+3)=0$

either $x=0$ or $x+1=0$

$\Rightarrow = -1$ or $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ الفترة $-1 \in [-3, 0]$

$\therefore$ الفترات هي $[-3,-1]\ ,\ [-1,0]$

$. A_1=\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-3}^{-1}$

$=(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})-(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2})$

$=(\frac{3-16+18}{12})-(\frac{243-432+162}{12})$

$=\frac{5}{12}-(\frac{-27}{12})=\frac{5}{12}+\frac{27}{12}=\frac{32}{12}$

$\therefore A_2=\int_{-1}^{0}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}$

$=(\frac{(0)^4}{4}-\frac{4(0)^3}{3}+\frac{3(0)^2}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})$

$=(0)-(\frac{3-16+18}{12}) = -\frac{5}{12}$

$\therefore A=|A_1|+|A_2| = |\frac{32}{12}|+|-\frac{5}{12}|$

$=\frac{32}{12}+\frac{5}{12}$

$=\frac{37}{12}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=3x^2+4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

(2008/"تمهيدي")

(2010/"تمهيدي")

sol :

دائما $3x^2+4>0$ حيث $y\neq 0$

$A=\left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|$

$A=\left|\int_{-2}^{2}(3x^2+4)dx\right|$

$=|[x^3+4x]_{-2}^{2}|$

$=|(8+8)-(-8-8)|$

$|16+16| = 32$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=(1-x)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,3]$

(1/2012)

sol :

$(1-x)^3=0$

$\rightarrow x-1=0$

$\rightarrow x=1\in[-1,3]$

$A=|\int_{-1}^{1} f(x)dx|+|\int_{1}^{3} f(x)dx|$

$A=|\int_{-1}^{1}(1-x)^3dx|+|\int_{1}^{3}(1-x)^3dx$

$=|[\frac{-1}{4}(1-x)^4]_{-1}^{1}|+|[\frac{-1}{4}(1-x)^4]_{1}^{3}|$

$=|(0)-(\frac{-1}{4}(1+1)^3|+|(\frac{-1}{4}(1-3)^3-(0)|$

$=8$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1, x=3$

(3/2013)

sol :

if $y=0 \rightarrow x^2=0$

$\rightarrow x=0\notin[1,3]$

$A=|\int_{1}^{3} f(x)dx| = |\int_{1}^{3} x^2dx|$

$=|[\frac{1}{3}x^3]_{1}^{3}| = |(9)-(\frac{1}{3})|=|(\frac{26}{3}|$

$=\frac{26}{3}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,3]$

(1/2012)

sol :

if $y=0 \rightarrow x^2-4=0$

$\rightarrow x^2=4$

$\rightarrow x=2\in[-2,3]\ ,x=2\ \in[-2,3]$

$A=|\int_{-2}^{2} f(x)dx|+|\int_{2}^{3} f(x)dx|$

$A=|\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx|+|\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$

$=|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{-2}^{2}|+|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{2}^{3}|$

$=|(\frac{8}{3}-8)-(-\frac{8}{3}+8|+|(9-12)-(\frac{8}{3}-8)|$

$=|(\frac{-16}{3}-\frac{16}{3})|+|-3+\frac{16}{3}|$

$=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{39}{3}=13$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol :

$y = 1 - 2\sin^2 x$

$\rightarrow y = \cos 2x = 0$

(1/2001)

(2/2016)

(2/2018)

$ei: 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , k \in Z$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$or\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$= \left|\frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}[(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(1 - 0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0 - 1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol :

$y = 2\cos^2 x - 1 \quad \rightarrow y = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \rightarrow \cos 2x = 0$

(1/2006)

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

(1/2016"خارج القطر")

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(1 - 0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0 - 1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \cos 2x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol :

$\cos 2x = 0 \quad \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$

(2/2003)

$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}[(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(1 - 0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0 - 1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 4x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol :

$if\ y = 0 \to \sin 4x = 0 \to 4x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \to 4x = 0 \to x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \to 4x = \pi \to x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 2 \to 4x = 2\pi \to x = \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

(1/2007)

(1/2018)

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \frac{1}{4}\left|[(\cos\pi) - (\cos 0)\right| + \frac{1}{4}\left|[(\cos 2\pi) - (\cos\pi)\right|$

$= \frac{1}{4}\left|(-1) - (1)\right| + \frac{1}{4}\left|(1) - (1)\right|$

$= \frac{1}{4}|-2| + \frac{1}{4}|2|$

(3/2023 "احيائي")

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 2x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

sol:

$if\ y = 0 \to \sin 2x = 0 \to 2x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \to 2x = 0 \to x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \to 2x = \pi \to x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = -1 \to 2x = -\pi \to x = \frac{-\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

∴ فترات التكامل $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

(2/2008)

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|[(\cos 0) - (\cos -\pi)\right| + \frac{1}{2}\left|[(\cos\pi) - (\cos 0)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(1) + (1)\right| + \frac{1}{2}\left|(-1) - (1)\right|$

$= \frac{1}{2}|2| + \frac{1}{2}|-2| = 1 + 1 = 2$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1, x = -1$

sol :

$y = x^3 - x$ الفترة $[-1, 1]$

$y = 0$ نجعل, $0 = x^3 - x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

either $x = 0 \in [-1, 1]$

or $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \in [-1, 1]$,

∴ الفترات هي $[-1,0], [0,1]$

$A_1 = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx\right|$

$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|$

(1/2017)

$= \left|\left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right|$

$= \left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$

$A_2 = \left|\int_0^1 (x^3 - x)dx\right|$

$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}\right)\right|$

$= \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

(3/2020)

(2022/"تمهيدي "تطبيقي")

sol :

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 0$ او $x = -1$ او $x = 1$

∴ حدود التكامل $[-1, 0], [0, 1]$

$A_1 = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right|$

$= \left|\left[\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^3}{3}\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right|$

$= \left|0 - \left[\frac{-1}{5} - \frac{-1}{3}\right]\right| = \left|-\left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right]\right|$

$= \left|-\left[\frac{-3+5}{15}\right]\right| = \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15}$ unit^2

$A_2 = \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$

$= \left|\left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^3}{3}\right]\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] - 0\right| = \left|\frac{3-5}{15}\right| = \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15}$ unit^2

$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ unit^2

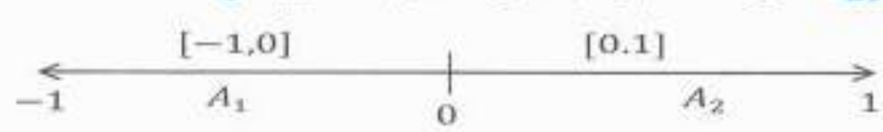
طريقة ثانية للحل

$f(x) = 0$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$

او $x^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 1$ بجذر الطرفين



$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx$

$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$

$= -\left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{-3+5}{15}\right) = \frac{-2}{15}$

$A_2 = \int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx$

$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right] - 0$

$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3-5}{15} = \frac{-2}{15}$

$A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

sol :

$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = 0, \pi, 2\pi$

نجزء التكامل

$x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(2/2020 "تطبيقي")

$x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{-1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos 3\,(0)\right]$

$= \frac{-1}{3}[-1 - (1)] = \frac{2}{3}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{32}\right) - \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{-1}{3}[0 - (-1)] = \frac{-1}{3}$

$\therefore A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right|$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات بالفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

sol :

$\sin(x) = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi, -\pi, \ldots\ldots$

$0 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

(2021/"تمهيدي "احيائي")

$A_1 = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin(x)\ dx\right|$

$= \left|[-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| = |[-(1 - 0)]|$

$= 1\ \text{unit}^2$

$A_2 = \left|\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\right| = |[-\cos(x)]_{0}^{\pi}|$

$= |[-(-1 - 1)]|$

$= 2\ \text{unit}^2$

$A = A_1 + A_2 \ = 1 + 2 = 3\ \text{unit}^2$

اذا كان لمنحني الدالة $y=ax^3+bx$ نهاية عظمى محلية هي (-1,2) جد $a , b \in R$ ، ثم احسب المساحة المحددة بين هذا المنحني ومحور السينات .

sol :

$y = x^3 - 3x \quad , \quad y = 0$

$x^3 - 3x = 0$

(1/2023 "احيائي")

either $x = 0$

or $(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

$A_1 = \left| \int_{\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)dx \right|$

$= \left| \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{\sqrt{3}}^{0} \left| + \right| \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \Big]_0^{\sqrt{3}} \Big|$

$= \left| 0 - \left(\frac{(-\sqrt{3})^4}{4} - \frac{3(-\sqrt{3})^2}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{(\sqrt{3})^4}{4} - \frac{3(\sqrt{3})^2}{2} - 0 \right) \right|$

$= \left| -\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) \right| + \left| \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) \right|$

$= \left| -\left(\frac{-9}{4}\right) \right| + \left| \frac{-9}{4} \right| = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$

$= \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ وحدة مساحة

جد مساحة المحددة بالمنحني $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

sol :

1) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

(2/2023 "احيائي")

2) $A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$

$= \left| \left(\frac{1}{2} \sin \cancel{2} \frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{4}}} - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{2} \sin \cancel{2} \frac{\pi}{\cancel{2}} - \frac{1}{2} \sin \cancel{2} \frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{4}}} \right) \right|$

$= \left| \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) \right| + \left| \frac{1}{2} (0) + \frac{1}{2} (1) \right|$

$= \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| = 1$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1, x = -1$

sol :

$y = x^4 - x$ الفترة [-1, 1]

$y = 0$ نجعل, $0 = x^4 - x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

either $x = 0 \in [-1, 1]$

or $x^3 = 1 \in [-1, 1]$,

$\therefore$ الفترات هي [-1,0], [0,1]

$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} (x^4 - x)dx \right|$

(1/2024 "محاولات تطبيقي")

$= \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} \right|$

$= \left| \left(\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^2}{2}\right) \right| = \left| (0) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) \right|$

$= \left| -\left(\frac{-2-5}{10}\right) \right| = -\left(\frac{-7}{10}\right) = \left| \frac{7}{10} \right|$

$A_2 = \left| \int_0^1 (x^4 - x)dx \right|$

$= \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \right| = \left| \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^2}{2}\right) \right|$

$= \left| \left(\frac{2-5}{5}\right) \right| = \left| -\frac{3}{10} \right|$

$A = A_1 + A_2 = \left| \frac{7}{10} \right| + \left| -\frac{3}{10} \right| = \frac{10}{10} = 1$ وحدة مساحة

ب- المساحة المحددة بمنحني الدالتين

(1997 /2) (2008 /1) (2008 /1 "اسئلة خارج القطر")
(2015 /1" اسئلة خارج القطر") (2015 /3)
(2016 /3" اسئلة خارج القطر")

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2 \quad , y = x^4 - 12$

sol :

تقاطع الدالتين

$y = x^4 - 12 , \quad , y = x^2$

$x^4 - 12 = x^2$

$\Rightarrow x^4 - 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \neq 0$ (مجموع مربعين)

$\therefore x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 , \ [-2, 2]$ الفترة $\therefore$

$\therefore A = |\int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2) dx|$

$= |[\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2}|$

$= |(\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}) - (\frac{-32}{5} + 24 + \frac{8}{3})| = |\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}|$

$= |\frac{64}{5} - 48 - \frac{16}{3}| = |\frac{192-720-80}{15}| = |\frac{192-800}{15}| = |\frac{-608}{15}|$

$= \frac{608}{15}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = 2 - x^2 \ , g(x) = x^2$ بالفترة $[-2, 2]$

sol :

$h(x) = x - (2 - x^2)$

$= x^2 + x - 2$

(2/1999)

$, x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\rightarrow$ either $x = -2 \in [-2, 2]$

or $x = 1 \in [-2, 2]$

$\therefore A = |\int_{-2}^{1} h(x) dx| + |\int_{1}^{2} h(x) dx|$

$= |\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2) dx| + |\int_{1}^{2} (x^2 + x - 2) dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{-2}^{1}| + |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{1}^{2}|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) - (\frac{-8}{3} + 2 + 4)]| + |[(\frac{8}{3} + 2 - 4) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)]|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6)]| + |[(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2)]|$

$= \frac{19}{3}$ وحدة مساحة

(1998 /2) (2004 /1) (2009/" تمهيدي") (2014 /1)
(2015 /1 "اسئلة خارج القطر") (2021/2"احيائي")

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين
$g(x) = \sin x \cos x \ , f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

sol :

Let $\quad h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin x - \sin x \cos x$

$h(x) = 0$

$\sin x - \sin x \cos x = 0$

$\sin x \ (1 - \cos x) = 0$

اما $\sin x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = \pi \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

او $1 - \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 1$

$x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$A_1 = \left|\int_0^{\pi} h(x)\, dx\right| \quad , \quad A_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} h(x)\, dx\right|$

$A_1 = \left|\int_0^{\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx\right|$

$= \left|\left[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}\right]_0^{\pi}\right|$

$= |[-(-1) - 0) - (-1 - 0)]| = 2$

$A_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx\right|$

$= \left|\left[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$

$= |(-1 - 0) - (1 - 0)| = 2$

$\therefore A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$ وحدة مساحة

ملاحظة :- 1) اذا وجدت المساحتين دون اطلاق وبعد ان تجمعها وضع الاطلاق يعتبر الحل صحيح

2) او استخدم طريقة تعريف المطلق (الاثلاث) ايضا الحل صحيح

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين
$f(x) = x^2 \ , g(x) = 2x$ بالفترة $[1,3]$

sol :

$h(x) = x^2 - 2x$

$\rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x-2) = 0$

(1/2002)

either $x = 0 \notin [1,3]$

or $x = 2 \in [1,3]$

$\therefore A = |\int_1^2 h(x)dx| + |\int_2^3 h(x)dx|$

$= |\int_1^2 (x^2 - 2x)dx| + |\int_2^3 (x^2 - 2x)dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_1^2| + |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_2^3|$

$= |[(\frac{8}{3} - 4) - (\frac{1}{3} - 1)]| + |[(9 - 9) - (\frac{8}{3} - 4)]|$

$= 2$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 1 + \cos x$
$, y = -\cos x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol :

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= 1 + \cos x + \cos x = 1 + 2\cos x$

$1 + 2\cos x = 0$

$\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

(2/2004)

or $x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$= |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)dx|$

$= |[x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |(0) - (\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2})|$

$= \frac{\pi}{2} + 2$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين
$f(x) = 3x^2 \ , g(x) = x^4 - 4$

sol :

$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 4 - 3x^2$

$= x^4 - 3x^2 - 4$

if $h(x) = 0 \ \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \ \rightarrow x = 2$ OR $x = -2$

$, x^2 + 1 = 0$ تهمل

$\therefore A = |\int_{-2}^{2} h(x)dx| = |\int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\, dx|$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{-2}^{2}|$

$= |[(\frac{32}{5} - 8 - 8) - (\frac{-32}{5} + 8 + 8)]|$

$= |[\frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8]| = |[\frac{64}{5} - 32]|$

$= |[\frac{64 - 160}{5}]|$

$= |[\frac{-96}{5}]|$

(2/2002)

$= \frac{96}{5}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين
$f(x) = x \ , g(x) = \sqrt[3]{x}$ بالفترة $[-1,1]$

sol :

$h(x) = x - \sqrt[3]{x} \ \rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0$

$\rightarrow [\sqrt[3]{x} = x]$ بتكعيب الطرفين

(1/1999)

$x = x^3 \ \rightarrow x - x^3 = 0$

(2019/"تمهيدي")

$\rightarrow x(1 - x^2) = 0 \ \rightarrow x = 0$

OR $x = \pm 1 \in [-1, 1]$ لا تجزأ

$\therefore A = |\int_{-1}^{0} h(x)dx| + |\int_0^1 h(x)dx|$

$= |\int_{-1}^{0} (x^{\frac{1}{3}} - x)dx| + |\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x)dx|$

$= |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}| + |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_0^1|$

$= |[(0 - 0) - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})]| + |[(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) - (0 - 0)]|$

$= |-\frac{1}{4}| + |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin 2x\ ,\ g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

(2/2005)

sol :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$
$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

اما $\sin x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ OR $x = \pi \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

او $2\cos x - 1 = 0 \rightarrow 2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ OR $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx\right|$$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)\, dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)\, dx\right|$$

$$= -\frac{1}{2}\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\, dx\right|+\left|-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\, dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2 - (2\cos 0 - 1)^2\right| + \left|\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{2} - 1)^2 - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2\right|$$

$$= \frac{1}{4}[(1 - 1)^2 - (2 - 1)^2| + \left|\frac{1}{4}[(0 - 1)^2 - (1 - 1)^2\right|$$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = \sqrt{x}$ والمستقيم $f(x) = x$

(1/2011)

sol :

$h(x) = \sqrt{x} - x$ بتربيع الطرفين

$\rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \rightarrow [\sqrt{x} = x]$

$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0$

either $x = 0$ or $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ الفترة $[0, 1]$

$$A=\left|\int_0^1 h(x)dx\right|$$

$$\left|\int_0^1(\sqrt{x} - x)dx\right|=\left|\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx\right|$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left|\left(\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left|\left(\frac{2(0)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(0)^2}{2}\right)\right|= \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4-3}{6}\right|\right.$$

$= \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

س/ جد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$y = x^4 - 8\ ,\ y = 2x^2$

("تمهيدي"/2012)

sol :

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 8 - 2x^2$$
$$\rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$
$$\rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$
$$\rightarrow x^2 = 4 \quad \rightarrow x = \pm 2$$
$$\therefore A= \left|\int_{-2}^{2} h(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^2 - 8)\, dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$= \left|\left[\left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16\right) - \left(\frac{-32}{5} + \frac{16}{3} + 16\right)\right]\right|$$
$$= \left|\frac{64}{5} - \frac{32}{3} - 32\right|$$

$= \left|\frac{192 - 160 - 480}{15}\right| = \frac{126}{5}$ وحد مساحة

س: جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x)=\sin^2x\ ,\ g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

sol :

$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\sin^2x-\sin x=\sin x(\sin x-1)$

$\sin x(\sin x-1)=0$

$\rightarrow$ either $\sin x=0\ \rightarrow x=0+k\pi$

$k=0\ \rightarrow x=0\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$k=1\ \rightarrow x=\pi\notin[0,\frac{\pi}{2}]$

(1/2012"خارج القطر")

OR $\sin x=1$

$\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x-\sin x)\,dx|$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\sin x\right]dx$

$=|[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)+\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)+\cos 0\right]$

$=|\frac{\pi}{4}-1|=1-\frac{\pi}{4}$ وحدة مساحة

س: جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\ 2\sin x+1$ و $g(x)=\sin x$ حيث $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

sol :

$2\sin x+1=\ \sin x$

$\Rightarrow 2\sin x+1-\ \sin x=0$

$\Rightarrow \sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-1$ تقاطع الدالتين

$\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

$\therefore A=|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(2\sin x+1-\ \sin x)dx|$

$=|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)dx|$

(2/2013)

$=|[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}|$

$=|(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2})-(-\cos$

(1/2015"أسئلة النازحين")

$=|(-0+3\ \frac{\pi}{2})-(-1+0)|$

$=|0+\frac{3\pi}{2}+1|=\frac{3\pi+2}{2}$ وحدة مساحة

س: جد المساحة المحددة بين منحني القطع المكافىء $y=x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y=2x+3$

sol :

$h(x)=g(x)-f(x)$

$=x^2-2x-3$

(1/2014"خارج القطر")

$x^2-2x-3=0$

$\rightarrow(x-3)(x+1)=0$

$\rightarrow x=3\ ,x=-1$

$\therefore A=|\int_{-1}^{3}h(x)dx\,|+|\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx|$

$=|[\frac{x^3}{3}-x^2-3x]_{-1}^{3}|$

$=|[(\frac{27}{3}-9-9)-(\frac{-1}{3}-1+3)]|$

$=|[9-9-9+\frac{1}{3}+1-3]|$

$=|[-9-\frac{-2}{3}]|$

$=|[\frac{-25}{3}]|=\frac{25}{3}$ وحدة مساحة

س: جد المساحة المحددة بالدالتين : $f(x)=\cos^2x$ و $g(x)=\sin^2x$ ومحور السينات بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

sol :

$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

$\cos 2x=0$

$\rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x=\frac{\pi}{4}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}}h(x)dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx|$

(2/2009)

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx|+|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$

$=|[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}|+|[\frac{1}{2}\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$=|\frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)|+|\frac{1}{2}[(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2})|$

$=|\frac{1}{2}(1-0)|+|\frac{1}{2}(0-1)|$

$=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{-1}{2}\right|$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\ 1$ وحدة مساحة

س جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

sol :

(2014/"تمهيدي"خارج القطر")

(2/2017)

(2/2017 "خارج القطر")

(1/2019 " تطبيقي")

(2/2021 " تطبيقي")

(2023/تمهيدي " تطبيقي")

(1/2023 " تطبيقي")

(3/2023 " تكميلي")

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= \cos x - \sin x$

$\rightarrow \cos x - \sin x = 0 \quad \rightarrow \cos x = \sin x$

$\rightarrow \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ OR $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

∴ الفترات هي $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$\therefore A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \sin x)dx\right|$

$= \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\frac{\pi}{2}))\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})\right|$

$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1+0)\right| + \left|(1+0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right| = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}|$

$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=x^2+5x-4$ والمستقيم $y = 6x+2$

sol :

(1/2018 "خارج القطر")

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^2 + 5x - 4 - 6x - 2$

$\rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\rightarrow$ اما $x - 3 = 0 \quad \rightarrow x = 3$ OR $x + 2 = 0$

$\rightarrow x = -2$ ∴ فترة التكامل $[-2,3]$

$\therefore A = \left|\int_{-2}^{3} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-2}^{3}(x^2 - x - 6)\,dx\right| = \left|[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x]_{-2}^{3}\right|$

$= \left|[(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3)) - (\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2))]\right| = \left|[(9 - \frac{9}{2} - 18) - (\frac{-8}{3} - 2 + 12)]\right|$

$= \left|-9 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} - 10\right|$

$= \left|\frac{8}{3} - \frac{9}{2} - 19\right| = \left|\frac{16-27-114}{6}\right| = \left|\frac{-125}{6}\right| = \frac{125}{6}$ وحدة مساحة

س جد مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

sol :

نجعل $x^3 = x$

$\because x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

اما $x = 0$ أو $x^2 = 1 \to x = \mp 1$

$\therefore A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = (0 - 0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 0 - \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

(3/2019"تطبيقي")

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)$

$= \frac{-1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$

$\because A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$, $y = x$

sol :

(2015/"تمهيدي")

(3 /2017)

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^3 - x$

$\to x^3 - x = 0$

$\to x(x^2 - 1) = 0$

$\to x(x-1)(x+1) = 0$

$\to x = 0$ **OR** $x = 1$

OR $, x = -1$

$\therefore A = \left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right|$

$= \left|[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}\right| + \left|[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{0}^{1}\right|$

$= \left|[(0-0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})]\right| + \left|[(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0-0)]\right|$

$= \left|[\frac{1}{4}]\right| + \left|[\frac{-1}{4}]\right|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

س جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = -\sin x$ و $y = \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

sol :

(1/2021"احيائي")

$R(x) = \cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$\tan x = -1 \quad \dots\dots\dots \quad (*)$

$$\therefore \; x = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x + \sin x] dx\right|$$

$= \left|[\sin x - \cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\left[\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right] - [\sin 0 - \cos(0)]\right|$

$= |[1 - 0] - [0 - 1]|$

$= |1 + 1| = 2 \text{ unit}^2$

س جد المساحة المحددة بالدالتين

$g(x)=\sin x \cos x$, $g(x)=\sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

sol :

Let $g(x) = \sin x$, $f(x) = \sin x . \cos x$

(1/2024)

(1/2024"محاولات أحياني")

$\sin x \cos x = \sin x$

$\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x\,(1 - \cos x) = 0$

اما $\sin x = 0 \rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi]$ حدود

$x = \pi \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

او $1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1$

$x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$A_1 = \left|\int_0^{\pi} h(x)\,dx\right|$, $A_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} h(x)\,dx\right|$

$A_1 = \left|\int_0^{\pi}(\sin x \cos x - \sin x)\,dx\right|$

$= \left|\left[\frac{(\sin x)^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi}\right|$

$= \left|\left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi\right) - \left(\frac{\sin^2 0}{2} + \cos 0\right)\right|$

$= |\,[0 + (-1)) - (0 + 1)]| = |-1 - 1|$

$= |-2| = 2$ وحدة مساحة

$A_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x \cos x - \sin x)\,dx\right|$

$= \left|\left[\frac{(\sin x)^2}{2} + \cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$

$= \left|\left(\frac{\sin^2 2\pi}{2} + \cos 2\pi\right) - \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi\right)\right|$

$= |(0 + 1) - (1 - 0)| = |1 + 1|$

$= |2| = 2$ وحدة مساحة

$\therefore A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$ وحدة مساحة

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرة $18\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/sec$ بعد مرور 4sec من بدء الحركة جد :
a) المسافة خلال الثانية الرابعة.
b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني

sol :

$$V(t) = \int a(t)dt$$

$$\rightarrow V(t) = \int 18\,dt \rightarrow V(t) = 18t + c$$

$V(t) = 82$ عندما $t = 4$

(1 /1997)

$82 = 72 + c \rightarrow c = 10$

$\rightarrow V(t) = 18t + 10$

a) $d = d = |\int_3^4 V(t)\,dt|$

$= |\int_3^4 (18t + 10)dt| = |[9t^2 + 10t]_3^4|$

$= |184 - 111| = 73\ m$

b) $S = \int_0^{10} V(t)dt$

$$= \int_0^{10} (18t + 10)dt$$

$= [9t^2 + 10t]_0^{10}$

$= (900 + 100) - (0 - 0) = 1000\ m$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} m/sec$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20m جد ازاحته عند كل t

sol :

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt$$

(2010/ "تمهيدي")

$$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{-1}{2}}\right)dt$$

(2 /2003)

$= \frac{3}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2.3\,t^{\frac{1}{2}} + c$

$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c$

$\rightarrow 20 = 8 + 12 + c$

$\rightarrow c = 0$

$\rightarrow s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t - 4)\ m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة [1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

sol :

a) $V(t) = 0 \rightarrow 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2 \in [1, 6]$

$d = |\int_1^2 V(t)dt| + |\int_2^6 V(t)dt|$

(2 /2000)

$d = |\int_1^2 (2t - 4)dt| + |\int_2^6 (2t - 4)dt|$

$= |[t^2 - 4t]_1^2| + |[t^2 - 4t]_2^6|$

$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |36 - 24) - (4 - 8)|$

$= |-4 + 3| + |12 + 4| = 1 + 16 = 17\ m$

$$s = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t - 4)dt = [t^2 - 4t]_0^4$$

$= (16 - 16) - (0 - 0) = 0m$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 6t + 3)\ m/s$ احسب
1) المسافة المقطوعة بالفترة [2,4]
2) الازاحة المقطوعة بالفترة [2,4].
3) الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ m/sec^2$

sol :

a) $V(t) = 0 \rightarrow 3t^2 + 6t + 3 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \rightarrow 3(t + 1)^2 = 0$

$t = -1 \notin [2, 4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

(2 /2003)

$= |\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)|$

$= |124 - 26| = 98\ m$

$$s = \int_2^4 V(t)dt$$

$$= \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt$$

$= [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4$

$= (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)$

$= 124 - 26 = 98m$

$a(t) = V'(t) = 6t + 6$

$\rightarrow 18 = 6t + 6$

$\rightarrow 6t = 12 \rightarrow t = 2\ sec$

س جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5\ m/sec^2$ فاذا كان بعده من بدء الحركة يساوي $180m$ بعد مرور $6sec$ والسرعة عندها $45m/sec$ جد السرعة عند $t = 2$.

sol :

(2 /2004)

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 5\ dt$

$\rightarrow V(t) = 5t + c$

$V(t) = 45$ عندما $t = 6$

$45 = 30 + c$

$\rightarrow c = 15 \quad \rightarrow V(t) = 5t + 15$

$V(2) = 10 + 15 = 25\ m/s$

س جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t+2)\ m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي $2sec$ من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة $[2,6]$

sol :

(2005/ "تمهيدي")

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int (3t+2)\ dt$

$\rightarrow V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$

$c = 0$ اي انه $V = 0$

$t = 0$ بما ان التعجيل منتظم فانه في بدء الحركة يكون فيها

$V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$

a) $V(2) = 6 + 4 = 10\ m/s$

b)

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عند حساب المسافة المقطوعة بفترة معينة لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يتجزأ التكامل .

$d = |\int_2^6 V(t)dt|$

$= |\int_2^6 (\frac{3}{2}t^2 + 2t)dt|$

$= |[\frac{1}{2}t^3 + t^2]_2^6| = |(108 + 36) - (4 + 4)|$

$= |136| = 136\ m$

س تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

sol :

(2007/ "تمهيدي")

(2 /2014)

(2 /2016)

$V(t) = 100t - 6t^2$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt = \int(100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 50t^2 - 2t^3 + c$

$S(t) = 0,\ t = 0$ السكون يعني

$0 = 50\,(0)^3 - 2(0)^3 + c \quad \Rightarrow c = 0$

$\therefore S(t) = 50\,t^2 - 2\,t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه

يعني الازاحة = صفر

$S(t) = 0\ ,\ (0 = 50\,t^2 - 2\,t^3) \div 2 \ \Rightarrow 25\,t^2 - t^3 = 0$

$t^2(25 - t) = 0$ either $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

Or $25 - t = 0 \Rightarrow t = (25)\ s$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 100 - 12t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 100 - 12\,(25) = 100 - 300$

$= -200\ m/s^2$ التعجيل

س جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $10\ m/s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته $24\ m/s$ جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

sol :

(1 /2007)

(1/2023 "أحيائي")

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 10\ dt \quad \rightarrow V(t) = 10t + c$

$V(t) = 24$ عندما $t = 2$

$24 = 20 + c$

$\rightarrow c = 4$

$\rightarrow V(t) = 10t + 4$

a) $d = |\int_4^5 V(t)\ dt|$

$= |\int_4^5 (10t + 4)dt| = |[5t^2 + 4t]_4^5|$

$= |(125+20) - (80+16)| = 49\ m$

b) $S = \int_0^4 V(t)dt$

$= \int_0^4 (10t + 4)dt$

$= [5t^2 + 4t]_0^4$

$S = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (10t + 4)dt = [5t^2 + 4t]_0^4$

$= (80 + 16) - (0 - 0) = 96\ m$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 12t + 9)\ m/min$ احسب المسافة المقطوعة بالفترة [0.2] ثم احسب الزمن اللازم الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m/min^2$.

sol :

(1 /2009)

$V(t) = 0 \ \rightarrow 3t^2 + 12t + 9 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$\rightarrow 3(t - 3)(t - 1) = 0$

$\rightarrow$ either $t = 1 \in [0,2]$, or $t = 3 \notin [0,2]$

$d = |\int_0^1 V(t)dt| + |\int_1^2 V(t)dt|$

$d = |\int_0^1 (3t^2 + 12t + 9)dt| + |\int_1^2 (3t^2 + 12t + 9)dt|$

$= |[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1| + |[t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2|$

$= |(1 - 6 + 9) - (0)| + |(8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9)|$

$= |4| + |-2| = 6\ m$

(2 /2024)

$a(t) = V'(t) = 6t - 12$

$\rightarrow 18 = 6t - 12$

$\rightarrow 30 = 6t \ \rightarrow t = 5min$

س/ سفينة شحن تتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2 - 6t + 3)m/m$ احسب:
المسافة المقطوعة في الفترة [2, 4]
الازاحة المقطوعة بعد مرور خمسة دقائق من بدء الحركة.

sol :

(1 /2013 "خارج القطر")

(4 /2014 "أسئلة النازحين "الانبار")

a) $V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0$

$\rightarrow 3(t - 1)^2 = 0$

$t = 1 \notin [2,4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

$= |\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)|$

$= |26| = 26\ m$

$s = \int_a^b V(t)dt$

$= \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt$

$= [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$

$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65m$

(2023/تمهيدي "أحيائي")
اذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة
$v(t)=(3t^2 - 6t + 3)m/m$
احسب:
1 - المسافة المقطوعة في الفترة [2, 4]
2 - الازاحة في الفترة [0, 5]

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$
احسب :
(a) السرعة عندما $t = 2$ ، (b) المسافة خلال الفترة [1, 2]
(c) الازاحة بعد [10] ثواني من بدء الحركة.

sol :

(2 /2011)

(a) $a(t) = 4t + 12$

$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t + 12)dt$

$\Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + c \quad t = 4\ s,$

(3 /2016)

$v(t) = 90\ m/s$ لكن

$\Rightarrow 90 = 32 + 48 + c \ \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \qquad t = 2$

$\therefore v(2) = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$

(b) $v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \neq 0$

$\therefore$ المسافة $= d = |\int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt|$

$= |[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_1^2|$

$= |(\frac{16}{3} + 24 + 20) - (\frac{2}{3} + 6 + 10)|$

$= |\frac{16}{3} + 44) - (\frac{2}{3} + 16)|$

$= |\frac{148}{3} - \frac{50}{3}| = |\frac{98}{3}| = \frac{98}{3}\ m$

(c)

(1 /2019)

$s(t) = \int_0^{10} v(t)dt$

$s(t) = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)dt$

(2 /2021 "تطبيقي")

$= \frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_0^{10}$

$= \left(\frac{2000}{3} + 600 + 100\right) - 0$

$= \frac{2000 + 1800 + 200}{3} = \frac{4100}{3} m$

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرهُ $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/s$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:- (a) المسافة خلال الثانية الثانية. (b) بعدهُ عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين

sol :

التعجيل $a(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=\int a(t)dt$

❖ تكامل التعجيل = السرعة

$\Rightarrow v(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=18t+c$ ← (تكامل غير محدد دائماً)

لكن $v(t)=82\ m/s$ عندما $t=4\ s$

(1 /2015)

$82 = 18(4)+c \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t) = 18t + 10$ السرعة

المسافة خلال الثانية الثالثة يعني الفترة $[1, 2]$

$V(t) = 18t + 10 > 0$

$0 = 18t + 10 \Rightarrow t=\frac{-10}{18}$ يهمل

$\therefore s(t) = \left|\int_1^2 (18t+10)dt\right| = \left|[9t^2+10t]_1^2\right|$

$= |(36+20) - (9+10)|$

$= |56-19| = 37\ m$

(2) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين يعني الفترة $[0, 2]$

$S(t) = \int_0^2 (18t+10)dt$

$= [9t^2+10t]_0^2 = (36+20)-(0+0) = 56\ m$

س: تتحرك نقطة من السكون وبعد t دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(50t - 3t^2)\ km/min$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

sol :

$V(t) = 50t - 3t^2.$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt = \int (50t - 3t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 25t^2 - t^3 + c$

∵ السيارة تتحرك من السكون فان $S(t) = 0,\ t = 0 \quad , c = 0$

$\therefore S(t) = 25t^2 - t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه

يعني الازاحة = صفر

$S(t) = 0, 25t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(25 - t) = 0$

$t^2(25-t) = 0$ either $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

Or $25 - t = 0 \Rightarrow t = (25)$

(2016/ 2"خارج القطر")

ولحساب التعجيل

$V(t) = 50t - 3t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 50 - 6t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 50 - 6(25) = 50 - 150$

$= -100\frac{km}{min^2}$ التعجيل

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان $V(t) = 3t^2 - 6t$ فجد: 1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

sol :

(2016/ "تمهيدي")

(2023/ 2"تطبيقي")

$V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t = 0$

$\rightarrow 3t(t-2) = 0$

$\rightarrow t = 0 \notin [1,3] \quad$ or $t = 2 \in [1,3]$

$d = \left|\int_1^2 V(t)dt\right| + \left|\int_2^3 V(t)dt\right|$

$d = \left|\int_1^2 (3t^2 - 6t)dt\right| + \left|\int_2^3 (3t^2 - 6t)dt\right|$

$= \left|[t^3 - 3t^2]_1^2\right| + \left|[t^3 - 3t^2]_2^3\right|$

$= |(8-12) - (1-3)| + |(27-27) - (8-12)|$

$= |-4+2| + |0+4| = 2+4 = 6$ وحدة طول

$S = \int_1^3 V(t)dt$

$= \int_1^3 (3t^2 - 6t)dt = [t^3 - 3t^2]_1^3$

$= (27-27) - (1-3) = 2$ وحدة طول

س: تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

sol :

$V(t) = 100t - 6t^2.$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt$

(1 /2018)

$= \int (100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 50t^2 - 2t^3 + c$

∵ الجسم يتحرك من السكون فان $S(t) = 0,\ t = 0 \quad , c = 0$

$0 = 0 - 0 + c \rightarrow c = 0$

$\therefore S(t) = 50t^2 - 2t^3$

لان الجسم يعود الى موضعه الاول اي ان $s = 0$

$[0 = 50t^2 - 2t^3] \div 2$

$25t^2 - t^3 = 0 \quad \rightarrow t^2(25 - t) = 0$

$t = 0$ يهمل او $25 - t = 0 \rightarrow t = 25$ ثانية

ولحساب التعجيل

$V(t) = 100t - 6t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 100 - 12t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 100 - 12(25)$

$= 100 - 300 = -200\ m/sec^2$ التعجيل

س: تحرك رجل بسيارته من البيت وبعد t دقيقة من الزمن اصبحت سرعة سيارته $(50t - 3t^2)km/min$ جد الزمن اللازم لعودته للبيت لجلب حقيبته التي نساها ومن ثم احسب تعجيل السيارة عند ذلك الزمن .

(2019/ "تمهيدي")

sol :

$$S = \int (50t - 3t^2)\,dt$$

$$S = \frac{50t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + c$$

$$S = 25t^2 - t^3 - c$$

$t = 0 \ , S = 0 \quad \because c = 0$

$\therefore S = 25t^2 - t^3$

$S = 0$ للعودة الى البيت

$25t^2 - t^3 = 0$

$t^2(25 - t) = 0$

اما $t^2 = 0 \ \rightarrow t = 0$ يهمل

او $25 - t = 0 \ \rightarrow t = 25$ min

$a(t) = 50 - 6t$

$a(25) = 50 - 6(25)$

$= 50 - 150 = -100\ km/min^2$

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)\ m/s$ ، احسب الازاحة في الفترة $[0 , 5]$

(2021/"تمهيدي "تطبيقي")

sol :

$$s(t) = \int_a^b V(t)\,dt$$

$$s(t) = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt$$

$= [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$

$= (125 - 75 + 15) - (0)$

$= 65$ m

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 4t + 7)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها

(2 /2010)

sol :

$V(t) = 0 \ \rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0$

a) $d = |\int_0^4 V(t)\,dt|$

$= |\int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt|$

$= |[t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4|$

$= |(64+32+28) - (0)| = 124$ m

$a(t) = V'(t) = 6t + 4$

$\rightarrow a(4) = 24 + 4 = 28\ m/sec^2$

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 3t - 6$ cm
جد :-
1) المسافة المقطوعة في $[1,3]$
2) الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة .
3) بعده بعد مضي (4) ثوان من بدء الحركة .

(2/2019 "تطبيقي")

sol :

1) $\because V(t) = 0$

$3t - 6 = 0 \rightarrow t = 2 \in [1,3]$

$$d = \left|\int_1^2 (3t-6)\,dt\right| + \left|\int_2^3 (3t-6)dt\right|$$

$$= \left|\left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_2^3\right|$$

$$= \left|(6-12) - \left(\frac{3}{2} - 6\right)\right| + \left|\left(\frac{27}{2} - 18\right) - (6-12)\right|$$

$$= \left|-6 - \frac{3}{2} + 6\right| + \left|\frac{27}{2} - 18 + 6\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{2}\right| + \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m$$

2) $\because S = \int_4^5 (3t-6)dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_4^5$

$$= \left[\frac{75}{2} - 30\right] - \left[\frac{48}{2} - 24\right]$$

$$= \frac{75}{2} - 30 - 24 + 24 = \frac{75}{2} - 30 = \frac{15}{2}\ m$$

3) $\because S = \int_0^4 (3t-6)dt$

$$= \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_0^4 = \left(\frac{48}{2} - 24\right) - (0 - 0)$$

$= 24 - 24$

$= 0$ m

س/ المنطقة المحددة بالمنحي $y=\sqrt{x}\,, 0\le x\le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها

Sol:

(1/2011"أسئلة خارج القطر")

(3/2013)

$V=\int_a^b y^2dx$

$=\pi\int_0^4 x\,dx$

$=\pi\,[\frac{1}{2}x^2]_0^4 = 8\pi$ وحدة حجم

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافىء $y^2=8x$ والمستقيمين $x=2,\ x=0$ حول محور السينات.

Sol:

(2/2011)

(2014/"تمهيدي")

$V=\int_a^b y^2dx$

$=\pi\int_0^2 8x\,dx$

$=\pi\,[4x^2]_0^2=16\pi$ وحدة حجم

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافىء $y=2x^2$ والمستقيمين $x=0, x=5$ حول محور السينات.

Sol:

(2012/"تمهيدي")

(2017/"تمهيدي")

$V=\int_a^b y^2dx$

$=\pi\int_0^5 (2x^2)^2\,dx$

$=\pi\int_0^5 (4x^4)\,dx$

$=[\frac{4}{5}x^5]_0^5 =[\frac{4}{5}(0)^5-\frac{4}{5}(5)^5]_0^5=\pi[4(625)]$

$=2500\pi$ وحدة حجم

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيمين $y=1\ y=2$, حول محور الصادات.

Sol

(1/2012)

$:y=x^2+1\ \rightarrow x^2=y-1$

$V=\int_a^b x^2dy$

$=\pi\int_1^2 (y-1)\,dy$

$=\pi\,[\frac{1}{2}y^2-y]_1^2$

$=\pi\left[(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\frac{1}{2}\ \pi$ وحدة حجم

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\sqrt{5}x^2$ والمستقيمين $x=2,\ x=1$ حول المحور السيني.

Sol

(2/2012)

$:y=\sqrt{5}x^2$

$\rightarrow y^2=5x^4$

$V=\pi\int_a^b y^2dx$

$=\pi\int_1^2 5x^4\,dx$

$=\pi\,[\frac{5}{5}x^5]_1^2$

$=(32-1)\pi = 31\ \pi$ وحدة حجم

(1/2012 اسئلة خارج القطر)(2015/تمهيدي)(3/2018)
(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y=4x^2$ والمستقيمين $y=0, y=16$ حول المحور الصادي.

Sol:

$V=\int_a^b x^2dy$

$=\pi\int_0^{16}\frac{y}{4}\,dy$

$=\pi\,[\frac{y^2}{8}]_0^{16}$

$=\ \pi(32-0) = 32\pi$ وحدة حجم

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

Sol

(1/2013)

(1/2015"أسئلة خارج القطر")

(1/2016"أسئلة خارج القطر")

$:y=x^2+1$

$\rightarrow x^2=y-1\quad \text{if } x=0\ \rightarrow y=1$

$V=\int_a^b x^2dy$

$=\pi\int_1^4 (y-1)\,dy$

$=\pi\,[\frac{1}{2}y^2-y]_1^4$

$=\pi\left[(8-4)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=\frac{9}{2}\ \pi$ وحدة حجم

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1$,$y = 2$ حول المحور الصادي.

Sol:

(2/2013)

$$\because y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$V = \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2$$

$$= \pi\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\pi$$ وحدة حجم

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y=4x^2$ والمستقيمين $y = 0, y = 1$ حول المحور الصادي.

Sol:

$$V = \int_a^b x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{4} y\, dy$$

(1/2014"أسئلة النازحين")

$$= \pi \left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{8} - 0\right) = \frac{1}{8}\pi$$ وحدة حجم

احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

Sol:

$$y^2 = x^3, \quad [0, 2]$$

(2/2014)

$$V = \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3\, dx$$

(1/2017"أسئلة الموصل")

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \pi[4 - 0] = 4\pi$$ وحدة حجم

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافىء الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 0 , x = 5$ حول محور السينات

Sol:

$$y = 2x^2$$

$$\rightarrow y^2 = 4x^4$$

(2019/"تمهيدي")

$$V = \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^5 4x^4\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5$$

$$= \frac{4}{5}\pi[5^5 - 0^5] = 2500\,\pi$$ وحدة حجم

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}, x = 1$ حول المحور الصادي.

Sol:

$$\because x = 1 \rightarrow y = 1 \;, x = \frac{1}{2} \rightarrow y \frac{1}{1/2} = 2$$

$$V = \int_a^b x^2 dy$$

(3/2015)

$$= \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy$$

(4/2015"أسئلة النازحين")

$$= \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy$$

(1/2017"أسئلة خارج القطر")

$$= \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}\pi$$ وحدة حجم

جد الحجم الناشىء من دوران المساحة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ حيث $1 \le y \le 3$ دورة كاملة حول محور الصادات

Sol:

$$\because y = \frac{3}{x}$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{y}, \quad \rightarrow x^2 = \frac{9}{y^2}$$

(2/2017)

$$V = \int_a^b x^2 dy$$

$$= \pi \int_1^3 \frac{9}{y^2}\, dy$$

$$= \pi \int_1^3 9y^{-2}\, dy$$

$$= \pi \left[9.\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \pi \left[\frac{-9}{y}\right]_1^3$$

$$= \pi[-3 + 9] = 6\,\pi$$ وحدة مكعبة

احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sqrt{x^3}$ والمستقيمان $x = 0, \; x = 2,$ حول محور السينات.

Sol:

$$y = \sqrt{x^3}$$

$$\rightarrow y^2 = x^3$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3\, dx$$

(2019/"تمهيدي"تطبيقي")

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} x^2\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{4}[(2)^4 - (0)^2]$$

$$= \frac{\pi}{4}[16] = 4\pi \text{ unit}^3$$

س احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\sqrt{x^3}$ والمستقيمان $x=0,\ x=2,$ حول محور السينات.

Sol:

$y=\sqrt{x^3} \to y^2=x^3$

$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^2 x^3\,dx$

$=\pi\,[\frac{x^4}{4}x^2]_0^2=\frac{\pi}{4}[(2)^4-(0)^2]$

$=\frac{\pi}{4}[16]$ (2020/"تمهيدي"تطبيقي")

$=4\pi\ unit^3$

س جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $(x^2+y^2=9)$ حول محور السينات ومركزها نقطة الاصل.

Sol:

$x^2+y^2=9 \quad \Rightarrow y^2=9-x^2$

بما ان الدوران حول محور السينات

∴نقاط التقاطع للدائرة مع محور السينات هو x,y

$\therefore y=0 \quad \Rightarrow 0+x^2=9 \quad \Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\mp 3$

$x_1=-3 \ ,\ x_2=3$ حدي فترة التكامل

$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2dx$

$\Rightarrow V=\pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dy$

$\Rightarrow V=\pi\,[9x-\frac{x^3}{3}]_{-3}^{3}$ (1/2017"تطبيقي")

$V=\pi[(27-9)-(-27+9)]$

$V=\pi(18+18)$

$V=36\ \pi$ وحدة حجم مكعبة

س جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بمنحني الدالة $(x^2+y^2=81)$ حول محور الصادات علما ان المنحني يقطع محور الصادات.

Sol:

$x^2+y^2=9 \quad \Rightarrow y^2=9-x^2$

بما ان الدوران حول محور السينات

∴نقاط التقاطع للدائرة مع محور السينات هو x,y

$\therefore x=0 \quad \Rightarrow y=\mp 9$

$x^2=81-y^2$

$V=\pi\int_a^b x^2dx \Rightarrow V=\pi\int_{-9}^{9}(81-y^2)\,dy$

$V=\pi\,[81y-\frac{y^3}{3}]_{-9}^{9}$ (3/2017"تطبيقي")

$V=\pi\left[(81)(9)-\frac{9^3}{3})-(81)(-9)-\frac{(-9)^3}{3})\right]$

$V=\pi\left(\frac{2(9)^3}{3}+\frac{2(9)^3}{3}\right)=972\pi\ uint^3$

طريقة ثانية (طريقة الطالب الذكي)

المعادلة هي معادلة دائرة نصف قطرها 9 وحدة طول فان دورانها(مساحتها) حول اي محور يكون كرة نصف قطرها 9 ويمكن ان يحل بطريقة القانون

$r=9$

$V=\frac{4}{3}(9)^3\pi=972\pi\ uint^3$